МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Санкт-Петербургский
государственный университет аэрокосмического приборостроения

И. Л. Ерош

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. КОМБИНАТОРИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2001

УДК 512.54
Е78
ББК 22.1

Ерош И.Л.
Е78 Дискретная математика. Комбинаторика: Учеб. пособие/ СПбГУАП.СПб., 2001. 37 с.

В учебном пособии кратко изложены основные положения раздела дискретной математики «Комбинаторика». Приведено много задач для самостоятельного решения. Перед каждым набором задач разбираются примеры. В заключение приведены примеры использования комбинаторных методов в других разделах дискретной математики и в технических приложениях.

Пособие ориентировано на студентов 1-го курса технических университетов, аспирантов и преподавателей дисциплины “Дискретная математика”.

Рецензенты:
кафедра радиосистем Санкт-Петербургского электротехнического университета;
кандидат технических наук доцент *В. Н. Сасковец*

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособие

ВВЕДЕНИЕ

Комбинаторика является разделом дискретной математики, ориентированным на решение задач выбора и расположения элементов некоторого множества в соответствии с заданными правилами и ограничениями. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой комбинаторной конфигурации, поэтому комбинаторный анализ (комбинаторика) занимается изучением свойств комбинаторных конфигураций, условиями их существования, алгоритмами построения и оптимизацией этих алгоритмов.

Этот раздел математики тесно связан с рядом других разделов дискретной математики: теорией вероятностей, теорией графов, теорией чисел, теорией групп и т. д.

Первые параграфы настоящего пособия посвящены элементам классической комбинаторики: размещениям, перестановкам и сочетаниям. В последующих параграфах рассматриваются некоторые классы наиболее часто встречающихся задач: комбинаторные задачи с ограничениями, комбинаторные задачи раскладок и разбиений, комбинаторные задачи, решаемые с помощью рекуррентных соотношений.

Настоящее учебное пособие содержит большое число примеров, заимствованных из книг известного российского математика и прекрасного популяризатора математических идей Н.Я. Виленкина. К сожалению, его книги “Комбинаторика” и “Популярная комбинаторика” практически невозможно найти в библиотеках технических вузов, в особенности в библиотеках периферийных вузов. Только это, а также потребность в более сжатом изложении материала и привязки его к задачам вычислительной техники побудило автора написать это учебное пособие.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ КОМБИНАТОРИКИ

1.1. Размещения с повторениями

Рассмотрим задачу: сколько разных 5-разрядных чисел можно составить из 10 цифр?

Перенумеруем разряды:

1	2	3	4	5

В первый разряд можно поставить одну из 10 цифр. Независимо от того, какая цифра поставлена, во второй разряд можно также поставить одну из 10 цифр и т. д. Всего получается 10^5 различных чисел.

Для двоичной системы счисления (используются только две цифры: 0 или 1) получаем 2^5 различных чисел. Для системы с основанием k и числом разрядов n соответственно получаем:

$$A = k^n \tag{1}$$

n – число позиций (разрядов); k – число элементов в каждой позиции (цифр).

В общем виде задача ставится следующим образом: имеется k типов предметов (количество предметов каждого типа неограничено) и n позиций (ящиков, кучек, разрядов). Требуется определить, сколько разных комбинаций можно составить, если в позициях предметы могут повторяться? Ответ дается формулой (1).

Пример. Сколько разных чисел может содержать 10-разрядное слово в троичной системе счисления? В первый разряд можно поставить один из трех символов (0, 1 или 2), во второй разряд – также один из трех символов и т. д. Всего получаем 3^{10} чисел.

Упражнения

1. Кодовый замок имеет 5 одинаковых ячеек, каждая ячейка может быть установлена в одно из 6 устойчивых положений. Сколько

различных комбинаций нужно перебрать (максимальное количество), чтобы не зная кода, открыть кодовый замок?

2. Пятеро студентов сдают экзамен. Каким количеством способов могут быть выставлены оценки, если известно, что никто из студентов не получил неудовлетворительной оценки?

3. На почте имеется 5 типов марок одинакового достоинства. На конверт нужно наклеить 3 марки. Сколько существует различных комбинаций наклейки марок на конверт, если порядок наклейки марок имеет значение?

4. Частично определенная булева функция в таблице истинности (диаграмме Вейча) кроме 1 и 0 содержит 30 прочерков. На месте каждого прочерка при доопределении может быть поставлена 1 или 0. Сколько существует разных способов доопределения этой булевой функции? Оцените число способов доопределения в десятичной системе, используя очевидное неравенство: $2^{10} > 10^3$.

В некоторых случаях имеются ограничения на количество разных предметов, которые можно помещать на позиции. Пусть, например, имеется n позиций и на каждую i-ю позицию можно поставить k_i предметов. Сколько в этом случае существует разных расстановок предметов по позициям?

Легко обосновывается формула:

$$A = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots k_n = \prod_{i=1}^{n} k_i \qquad (2)$$

П р и м е р. В эстафете 100+200+400+800 метров на первую позицию тренер может выставить одного из 3 бегунов, на вторую – одного из 5, на третью – одного из 6, на четвертую – единственного бегуна (на каждую позицию выставляются разные бегуны). Сколько вариантов расстановки участников эстафетного забега может составить тренер?

В соответствии с формулой (2) получаем, что число вариантов равно: $3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 = 90$.

Упражнения

1. Сколько существует автомобильных номеров, содержащих три буквы и 5 цифр, если используется 20 букв русского алфавита и все 10 цифр?

2. Сколько существует 7 разрядных чисел в первых трех разрядах которых нет цифр 0, 8, 9? ($7^3 \cdot 10^4$)

3. Время работы агрегата в сутки задается часами, минутами и секундами. Сколько разных временных интервалов может быть задано для работы агрегата? (86400)

1.2. Размещения без повторений

Рассмотрим задачу: Сколько разных 5-разрядных чисел можно записать с помощью десяти цифр при условии, что в числах не используются одинаковые цифры?

Перенумеруем разряды:

1	2	3	4	5

В первый разряд можно поставить одну из 10 цифр (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Независимо от того, какая цифра помещена в первый разряд, во втором можно поставить только одну из 9 цифр, в третий – одну из 8 цифр и т. д. Всего существует $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$ различных пятиразрядных чисел, в каждом из которых нет двух одинаковых цифр.

В общем случае, если имеется k позиций и n разных предметов, причем каждый представлен в единственном экземпляре, то количество разных расстановок:

$$\mathrm{A} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = n!/(n-k)! \qquad (3)$$

В формуле (3) $s!$ означает *факториал числа* s, т. е. произведение всех чисел от 1 до s. Таким образом, $s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots s$.

П р и м е р. Из группы в 25 человек требуется выбрать старосту, заместителя старосты и профорга. Сколько вариантов выбора руководящего состава группы? Старосту выбрать можно одним из 25 способов. Поскольку выбранный староста не может быть своим заместителем, то для выбора заместителя старосты остается 24 варианта. Профорга выбирают одним из 23 способов. Всего вариантов: $25 \cdot 24 \cdot 23 = 25!/22! = 13800$.

Упражнения

1. Из коллектива работников в 25 человек нужно выбрать председателя, заместителя, бухгалтера и казначея. Каким количеством способов это можно сделать? ($25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 25!/(25-4)! = 303600$)

2. В парламент нового независимого государства нужно представить для рассмотрения варианты флагов (для определенности – три

горизонтальных полосы). Сколько вариантов флагов можно представить, если каждый флаг должен содержать три разных цвета, а количество цветов имеющегося материала, из которого делаются флаги, равно 12? (12!/9! = 1320)

3. На дискотеку пришло 12 девушек и 15 юношей. Объявлен “белый” танец. Все девушки выбрали для танцев юношей (и никто из них не отказался). Сколько могло образоваться танцующих пар? (15!/(15 – 12)!)

1.3. Перестановки без повторений

В предыдущих параграфах комбинации отличались как составом предметов, так и их порядком. Однако если в последней задаче юношей было бы тоже 12, то все комбинации отличались бы только порядком. Рассмотрим, сколько различных комбинаций можно получить, переставляя n предметов.

Положим в (3) $n = k$, тогда получим

$$A_n^n = P_n = n! \tag{4}$$

П р и м е р. К кассе кинотеатра подходит 6 человек. Сколько существует различных вариантов установки их в очередь друг за другом? Расставим 6 человек произвольным образом и начнем их переставлять всеми возможными способами. Число полученных перестановок в соответствии с формулой (4) будет равно 6! = 720.

Упражнения

1. Сколько различных слов (пусть и не имеющих смысла) можно получить путем перестановки букв в слове “ДУБЛЕНКА”? (8! = 40320)

2. В заезде на ипподроме участвуют 12 рысаков. Играющие в тотализатор заполняют карточки, в которых указывают порядок, в котором, по их мнению, рысаки прийут к финишу. Будем считать, что к финишу одновременно не могут придти два и более рысаков. Сколько вариантов заполнения карточек существует? (12!)

3. На заседании Думы 14 депутатов записались на выступления. Сколько вариантов списков выступающих может быть составлено, если списки отличаются только порядком? (14!) Подсчитайте количество расстановок депутатов в списке выступающих, если известно, что некоторые депутаты “Ж” и “З” уже добились, чтобы их включили в список выступающих под номерами соответственно 3 и 7.

1.4. Перестановки с повторениями

Иногда требуется переставлять предметы, некоторые из которых неотличимы друг от друга. Рассмотрим такой вариант перестановок, который называется перестановками с повторениями.

Пусть имеется n_1 предметов 1-го типа, n_2 предмета 2-го, n_k предметов k-го типа и при этом $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Количество разных перестановок предметов

$$P(n_1,\ n_2,\ n_3,\ ...n_k) = (n!)/(n_1!\ n_2!...n_k!) \qquad (5)$$

Для обоснования (5) сначала будем переставлять n предметов в предположении, что они все различны. Число таких перестановок равно n! Затем заметим, что в любой выбранной расстановке перестановка n_1 одинаковых предметов не меняет комбинации, аналогично перестановка n_2 одинаковых предметов также не меняет комбинации и т. д. Поэтому получаем выражение (5).

П р и м е р. Найдем количество перестановок букв слова КОМБИНАТОРИКА. В этом слове 2 буквы к, 2 буквы о, 1 буква м, 1 буква б, 2 буквы и, 1 буква н, 2 буквы а, 1 буква т и 1 буква р.

Таким образом, число перестановок букв этого слова равно: $P(2, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 1) = 13!/(2!\ 2!\ 2!\ 2!) = 13!/16$.

Упражнения

1. У школьника 2 авторучки, 4 карандаша и 1 резинка. Он раскладывает эти предметы на парте в ряд. Сколько вариантов раскладки?

2. Рыбаки поймали 5 подлещиков, 4 красноперки и 2 уклейки, посолили и вывесили на солнце сушиться. Сколько вариантов развешивания рыбы на нитке?

3. На узком участке трассы в линию движутся гонщики. Из них 5 на российских автомобилях, 6 – на американских и 3 – на итальянских. Сколько существует разных комбинаций машин на трассе, если нас интересует только принадлежность автомобиля конкретной стране?

4. Выходной алфавит абстрактного автомата содержит четыре буквы: y_0, y_1, y_2, y_3. Сколько разных выходных слов может выработать автомат при условии, что в выходном слове 2 раза встречаются буквы y_0, 4 раза буква y_1, 3 раза буква y_2 и 1 раз буква y_3?

1.5. Основные правила комбинаторики

При вычислении количества различных комбинаций используются правила сложения и умножения. Сложение используется, когда множества не совместны. Умножение – когда для каждой комбинации первого множества имеются все комбинации (или одинаковое число комбинаций) второго множества.

П р и м е р. Из 28 костей домино берутся 2 кости. В каком числе комбинаций вторая кость будет приложима к первой?

На первом шаге имеется два варианта: выбрать дубль (7 комбинаций) или не дубль (21 комбинация). В первом случае имеется 6 вариантов продолжения, во втором – 12.

Общее число благоприятных комбинаций равно: $7 \cdot 6 + 21 \cdot 12 = 294$.

А всего вариантов выбора 2 костей из 28 равно 378; т. е. при большом числе экспериментов в 7 случаях из 9 ($294/378 = 7/9$) при выборе 2 костей одна кость окажется приложимой к другой.

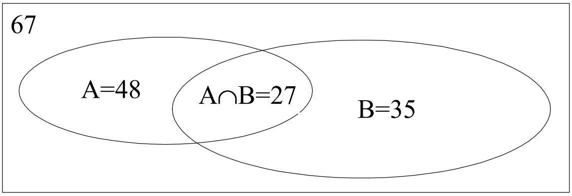
Упражнения

Пароль состоит из двух букв, за которыми следуют 4 цифры или из 4 букв, за которыми следуют 2 цифры. Сколько можно составить разных паролей, если из 33 букв русского алфавита используются только буквы: а, б, в, г, д, е, ж, и, к, л, м, н, п, р, с, т и все десять цифр? А сколько можно получить разных паролей, если из множества букв исключить дополнительно буквы а, е и с, а к 10 цифрам добавить символ *?

1.6. Главная теорема комбинаторики (Теорема о включениях и исключениях)

П р и м е р. На предприятии работает 67 человек. Из них 48 знают английский, 35 – немецкий и 27 – оба языка. Сколько человек не знают ни английского, ни немецкого?

Результат можно получить следующим образом. Построим диаграмму, на которой изобразим прямоугольник, соответствующий общему числу работающих (67) и две пересекающиеся области A и B по 48 и 35 человек (знающих английский и немецкий языки). На диаграмме общая часть этих двух областей соответствует 27 – количеству работающих, которые знают оба языка. Требуется найти область прямоугольника, не входящую ни в область A, ни в область B.



Очевидно, что $N = 67 - 48 - 35 + 27 = 11$.

Главная теорема комбинаторики (Теорема о включениях и исключениях)

Пусть имеется множество из N объектов произвольной природы. На этом множестве пусть задано n свойств. Каждый объект может обладать либо не обладать некоторыми из этих свойств. Сами свойства обозначим: α_1, α_2, α_3, ..., α_n. Будем обозначать $N(\alpha_i)$ – количество объектов точно обладающих свойством α_i и может быть какими-то другими, а $N(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j)$ – число объектов не обладающих ни свойством α_i, ни свойством α_j. Тогда число объектов, не обладающих ни одним из перечисленных свойств:

$$N\left(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3,...,\bar{\alpha}_n\right)=N-N\left(\alpha_1\right)-N\left(\alpha_2\right)-N\left(\alpha_3\right)...$$
$$-N\left(\alpha_n\right)+N\left(\alpha_1\alpha_2\right)+N\left(\alpha_1\alpha_3\right)+N\left(\alpha_1\alpha_4\right)+...$$
$$+N\left(\alpha_1\alpha_n\right)+N\left(\alpha_2\alpha_3\right)+...+N\left(\alpha_{n-1}\alpha_n\right)-N\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)+...$$
$$+\left(-1\right)^n N\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3,...,\alpha_i\right). \qquad (6)$$

Продолжение примера. Пусть теперь 20 человек знают французский, 12 – английский и французский, 11 – английский и немецкий и 5 – все три языка.

Тогда в соответствии с теоремой количество человек, не знающих ни одного из трех перечисленных языков (но может быть знающих китайский язык), равно $N = 67 - 48 - 35 - 20 + 27 + 12 + 11 - 5 = 9$.

Решето Эратосфена

Выпишем все числа от 1 до N. Сколько чисел делится на k? Очевидно, $[N/k]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x. Тогда, легко подсчитать количество чисел, не делящихся в данном диапазоне на k_1, k_2, k_3...

П р и м е р. Сколько чисел от 1до 100 не делятся на 5 и 7?

Воспользуемся теоремой о включениях и исключениях. Под первым свойством чисел будем понимать делимость на 5, под вторым – делимость на 7. На 5 делятся 20 чисел. На 7 делятся 14 чисел. На 35 делятся 2 числа. Следовательно, не делятся на 5 и 7: 100 – 20 – 14 + 2 = 68 чисел.

Упражнения

1. В механической мастерской работают 12 человек, из них 6 человек имеют диплом слесаря, 4 – диплом оператора станков с ЧПУ, 7 человек – диплом фрезеровщика, по 3 человека владеют двумя из перечисленных специальностей и 2 человека – всеми тремя. Начальство решает уволить работников, не имеющих дипломов хотя бы по одной из этих специальностей. Имеется ли такая возможность?

2. 3 танкиста, 2 артиллериста, 1 интендант и 4 пехотинца решили сфотографироваться.

Сколько разных фотографий может получиться, если все они располагаются в ряд и все представители одной группы войск находятся рядом?

3. Найти количество чисел, не делящихся на 3, 5, 7, в диапазоне от 200 до 500?

1.7. Сочетания без повторений

Если требуется выбрать k предметов из n, и при этом порядок выбираемых предметов безразличен, то имеем

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{7}$$

Формула (7) может быть получена следующим образом. Выберем по очереди k предметов из n. Число вариантов будет равно $n!/(n-k)!$ В этих расстановках k выбранных предмета имеют свои определенные позиции. Однако нас не интересуют в данном случае позиции выбранных предметов. От перестановки этих предметов интересующий нас выбор не меняется. Поэтому полученное выражение нужно разделить на $k!$

П р и м е р. Из группы в 25 человек нужно выбрать троих для работы в колхозе. Если выбирать их последовательно, сначала первого, потом второго, потом третьего, то получим $25 \cdot 24 \cdot 23$ варианта. Но так как нас не интересует порядок выбора, а только состав выбранной бригады, поэтому полученный результат нужно разделить еще на 3!

П р и м е р 2. В середине 60-х годов в России появились две лотереи, которые по недоразумению были названы “Спортлото”: лотерея 5/36 и 6/49. Рассмотрим одну из них, например, 6/49. Играющий покупает билет, на котором имеется 49 клеточек. Каждая клеточка соответствует какому-либо виду спорта. Нужно выделить (зачеркнуть) 6 из этих клеточек и отправить организаторам лотереи. После розыгрыша лотереи объявляются шесть выигравших номеров. Награждается угадавший все шесть номеров, пять номеров, четыре номера и даже угадавший три номера. Соответственно, чем меньше угадано номеров (видов спорта), тем меньше выигрыш.

Подсчитаем, сколько существует разных способов заполнения карточек “Спортлото” при условии, что используется лотерея 6/49. Казалось бы, заполняя последовательно номер за номером, получим: 49 · 48 · 47 · 46 · 45 · 44. Но ведь порядок заполнения не имеет значения, тогда получаем:

$$C_n^k = \frac{49!}{6!43!} = 13983816\,.$$

Эту же задачу можно решить и другим способом. Выпишем все номера подряд и под выбираемыми номерами поставим 1, а под остальными – 0. Тогда различные варианты заполнения карточек будут отличаться перестановками. При этом переставляются 6 предметов одного вида (единицы) и 49 – 6 = 43 предмета другого вида (нули), т. е. опять

$$P(6,43) = \frac{49!}{6!43!} = 13983816.$$

Если все участники заполняют карточки по-разному, то в среднем один из примерно 14 миллионов угадает все 6 номеров. А сколько человек в среднем угадают 5 номеров?

Выберем один из угаданных номеров ($C_6^1 = 6$) и заменим его на один из не угаданных ($C_{43}^1 = 43$). Итого: 6 · 43 = 258 человек из 14 миллионов угадают 5 номеров. А сколько угадают 4 номера? Выберем из 6 угаданных два и затем из 43 не угаданных тоже два и перемножим число вариантов выбора. Тогда получим:

$$C_6^2 \cdot C_{43}^6 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \times \frac{43 \cdot 42}{1 \cdot 2} = 13545 \text{ человек.}$$

Аналогично найдем, что 3 номера угадают 246820 человек, т. е. примерно 1,77% от всех играющих. Казалось бы, если взять 60 билетов и их “хорошо” заполнить, то можно надеяться на надежный выигрыш хотя бы одной тройки, при этом есть шанс угадать и 4, и 5, и 6 номеров. Однако это не так и число билетов, которые нужно заполнить, чтобы гарантировать угадывание трех номеров, существенно больше.

О целесообразности игры в “Спортлото” можно рассуждать с различных точек зрения. Прагматики понимают, что купив все билеты и как-то их заполнив, вы всегда проиграете, так как из выручки за проданные билеты сразу же производятся отчисления организаторам, изготовителям и распространителям билетов любой лотереи и может быть еще на какие-то благотворительные цели (например, на развитие спорта). Остатки идут на премии угадавшим 6, 5, 4 или 3 номера. Люди, верящие в свою счастливую судьбу, рассуждают примерно так: если не купить ни одного билета, то даже теоретической возможности выиграть не будет. Поэтому надо играть. Мне казалось, что компромисс между этими позициями состоит в том, чтобы, если уж очень хочется испытать судьбу, купить один билет. Однако лет 30 назад мое мнение об этом было поколеблено. В одном из крымских санаториев я познакомился с тренером по теренкуру, который при каждом заезде отдыхающих уговаривал их в складчину сыграть в “Спортлото”, обещая честно разделить выигрыш. Меня же он попросил разработать алгоритм безпроигрышной игры в “Спортлото”. Я ему честно заявил, что такого алгоритма не существует и предложил алгоритм, который позволял при минимальном числе билетов гарантировать угадывание хотя бы одной комбинации из 3 номеров. Он собрал деньги, купил билеты и мы заполнили их по моему алгоритму. Объявлены выигравшие номера были накануне отъезда. Мы угадали несколько комбинаций из 3 номеров и 2 комбинации из 4. Конечно, выигрыш был меньше затрат, что я и обещал всем участникам. Однако поскольку все участники эксперимента разъехались, то выигрыш полностью достался тренеру. Тогда я понял, что играть в лотерею все-таки можно и *можно даже выигрывать*, но только в том случае, *когда играешь на чужие деньги*, а не на свои! Этот мой вывод уже в недавнее время подтвердили организаторы различных современных лотерей типа МММ.

Кстати, попробуйте обосновать алгоритм заполнения минимального числа билетов лотереи “Спортлото”, при котором гарантируется угадывание хотя бы одной комбинации из 3 номеров. А может быть, попробовать то же с 4 номерами?

1.8. Сочетания с повторениями

П р и м е р. Требуется купить 7 пирожных. В магазине имеются пирожные следующих видов: эклеры, песочные, слоеные и наполеоны. Сколько вариантов выбора? Решение: выбранные пирожные заменяем единицами, и добавляем три нуля (разделителя). Каждой перестановке однозначно соответствует некоторый выбор. Например, одному из вариантов покупки будет соответствовать такой код: 1101110101. Пирожные покупаются следующим образом. Количество единиц слева до первого нуля соответствует покупке эклеров, между первым и вторым нулем – покупке песочных, между вторым и третьим – покупке слоеных, единицы после третьего нуля соответствуют числу покупаемых наполеонов. В случае приведенного кода покупается 2 эклера, 3 песочных, 1 слоеное и 1 наполеон. Количество вариантов покупки пирожных равно числу перестановок из 7 объектов одного типа (единиц) и 3 объектов второго типа (нулей).

Если имеются предметы n разных типов (без ограничения числа предметов каждого типа) и требуется определить, сколько комбинаций можно сделать из них, чтобы в каждую комбинацию входило k предметов? Каждую комбинацию шифруем с помощью 0 и 1, причем 1 соответствуют предметам, а 0 выполняют функцию разделителей. Тогда записав k единиц и добавив $n - 1$ нуль, мы получим комбинацию, при которой выбираются k предметов первого типа и ни одного предмета остальных типов. Переставляя всеми способами эти k единиц и $n - 1$ нуль, мы будем каждый раз получать некоторую расстановку, состоящую из k предметов. Тогда

$$P(k, n-1) = (k+n-1)!/(k!(n-1)!) = C_{n+k-1}^{k}\ . \qquad (8)$$

Упражнения

1. Входной алфавит абстрактного конечного автомата содержит 5 символов, например, a, b, c, d, f. Входные слова имеют длину в 11 символов. Сколько разных слов может быть подано на вход конечного автомата, если слова, имеющие одинаковый состав букв и различающиеся только порядком, считать одинаковыми? Например, слова *baabcf* и *fabcba* считаются одинаковыми. При решении задачи нужно учесть, что формула (8) определяет только количество вариантов выбора букв, но не их порядок в слове.

2. Граф-схема алгоритма микропрограммного автомата содержит операторные и условные вершины. Операторные вершины “начало” и “конец” обязательны. Сколько существует разных граф-схем алгоритмов, содержащих 6 вершин, если нас интересует только количественный состав, а не связи между вершинами?

1.9. Свойства чисел сочетаний

Приведем некоторые свойства чисел сочетаний, которые часто используются при преобразованиях формул комбинаторики.

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 - ... + C_n^n = 2^n$.

Первое свойство совершенно очевидно. Второе легко доказывается, если оба члена правой части представить по формуле (7). Третье свойство можно доказать методом математической индукции. Для примера, при $n = 2$ имеем:

$C_2^0 + C_2^1 + C_2^2 = 1 + 2 + 1 + 4 = 2^2$.

Для $n = 3$ получаем:

$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$.

Упражнения

1. Полный дешифратор имеет n входов и 2^n выходов. Сколько выходов будет иметь дешифратор на 5 входов, если исключить все выходы, соответствующие равновесным входным наборам из 2 и 4 единиц?

2. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Сколько могло быть жителей в таком государстве, если во рту человека не может быть больше 32 зубов?

1.10. Комбинаторные задачи с ограничениями

Рассмотрим несколько типов задач, в которых на комбинации накладываются определенные ограничения.

а) *Задача о львах и тиграх*. Имеется 5 львов и 4 тигра. Необходимо их расставить в ряд, но при этом известно, что тигр не может идти спокойно за тигром. Тогда расставляем львов с промежутками (их будет 6) и в них вставляем тигров. Таким образом, если тигры и львы обезличенные, то $C_6^4 = 15$. В общем случае при n львах и k тиграх имеем: C_{n+1}^k

б) *Задача о книжной полке*. Из m книг, стоящих на полке, нужно выбрать k таких, которые не стояли рядом на книжной полке. Отберем сразу k книг, останется $n–k$. Их расставим с промежутками ($n–k+1$ промежуток). На эти места вставим k книг. Общее решение:

$$C_{n-k+1}^k \qquad (9)$$

в) *Рыцари короля Артура*. 12 рыцарей сидят за круглым столом. Нужно выбрать 5 из них, но таких, которые не сидели рядом за столом. Множество всех решений разбиваем на два подмножества в зависимости от того, входит ли в команду избранных конкретный рыцарь или нет? Ответ: 15 +21 = 36. Если за круглым столом сидит n рыцарей, а нужно выбрать k, которые не сидели рядом, то задача решается аналогично и имеет смысл при $n \geq 2k$.

Упражнение

Определите условия при которых задачи а), б) и в) имеют решения.

1.11. Задачи о смещениях (о беспорядках)

Имеется 5 разных предметов. Сколько можно составить различных комбинаций, в которых ни один предмет не стоит на своем месте? Решим задачу с помощью теоремы о включениях и исключениях: $N(5) = 5! - C_5^1 \cdot 4! + C_5^2 \cdot 3! - C_5^3 \cdot 2! + C_5^4 \cdot 1! - C_5^5 \cdot 0! = 44$. При решении этой задачи мы использовали главную теорему комбинаторики, которая требует определить, что понимается под объектами и что под свойствами этих объектов. Общее число объектов равнялось 5!, так как под объектом мы будем понимать различные расстановки пяти предметов. Под первым свойством понимаем наличие первого предмета на своем месте, под вторым – наличие второго предмета на своем месте и т. д. Всего оказалось 5 свойств.

1.12. Частный случай теоремы о включениях и исключениях

В некоторых случаях количество объектов, обладающих определенным набором свойств, зависит только от числа этих свойств. Тогда формула для подсчета числа объектов, не обладающих ни одним из выделенных свойств, упрощается.

При произвольном n имеем:

$$N(\overline{n}) = N - C_n^1 \cdot N(1) + C_n^2 \cdot N(2) - ... + (-1)^n \cdot N(n)$$

В последнем примере предыдущего параграфа мы использовали этот частный случай главной теоремы комбинаторики. В общем случае при перестановке n предметов количество расстановок, при которых ни один предмет не находится на своем месте:

$$N(\overline{n}) = n! - C_n^1 \cdot (n-1)! + C_n^2 \cdot (n-2)! - ... + (-1)^n \cdot 0! = D_n \qquad (10)$$

Полученное значение D_n. иногда называют формулой полного беспорядка или субфакториалом. Субфакториал D_n можно представить и так:

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right],$$

где выражение в [...] стремится к e^{-1} при неограниченном возрастании n.

Субфакториал имеет свойства, похожие на свойства обычного факториала. Например,

$n! = (n-1)[(n-1)! + (n-2)!]$ – для обычного факториала,

$D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$ – для субфакториала.

Субфакториалы легко вычисляются по формуле

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n .$$

Приведем некоторые начальные значения субфакториалов:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D_n	0	1	2	9	44	255	1784	14273	128456

Упражнения

1. Вычислите значения субфакториалов для n = 10, 11, 12.

2. Имеется 6 различных предметов. В каком числе перестановок ровно 2 предмета остаются на своих местах, а остальные на чужих?

3. Имеется 10 разных предметов, расставленных в линию. Благоприятной перестановкой будем считать такую, при которой точно 4 любых предмета будут стоять на своих местах (а остальные – на чужих). Сколько существует таких расстановок? Во сколько раз изменится число благоприятных комбинаций, если на своих местах будут стоять 6 предметов?

1.13. Задача о караване

Рассмотрим еще одну задачу, в которой решение может быть получено с помощью главной теоремы комбинаторики. 9 верблюдов идут гуськом. Сколько существует комбинаций перестановки верблюдов, при которых ни один верблюд не идет за тем, за кем шел ранее.

Выделим запрещенные пары: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9). Для решения применим главную теорему комбинаторики. Для этого определим, что есть объект и что есть свойства. Под объектами будем понимать различные расстановки верблюдов. Всего их будет $N = 9!$. Под свойствами будем понимать наличие определенной пары в перестановке. Таким образом число свойств равно 8. Тогда количество перестановок, не обладающих ни одним из 8 свойств:

$$N(\overline{8}) = 9! - C_8^1\ 8! + C_8^2\ 7! - C_8^3\ 6! + \ldots + C_8^4\ 1! = 142729 = D_9 + D_8$$

В общем случае при n верблюдах имеем

$$D_n + D_{n-1}.$$

Упражнение

Рассмотрим последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. В каком числе перестановок этих чисел не встретится ни одной пары соседних чисел, т. е. пар $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_9, a_{10})$?

1.14. Комбинаторика разбиений

При анализе стратегий различных игр требуется подсчитывать количество комбинаций при раскладе определенных предметов. Наиболее распространенная карточная игра – преферанс. В классическом варианте этой игры карты раскладываются на 3 кучки (по числу играющих) и 2 карты кладутся в “прикуп“. Играют 32 картами, т. е. каждый игрок получает по 10 карт.

Определим количество вариантов расклада при игре в преферанс:

$$N = \frac{32!}{(10!)^3\, 2!}.$$

Для обоснования полученной формулы расставим все карты подряд и переставим их 32! способами. При каждой перестановке будем выделять первые 10 карт первому игроку, вторую десятку – второму, третью

– третьему, а последние 2 карты будем откладывать в “прикуп”. После этого заметим, что перестановка 10 карт в руках каждого игрока не меняет варианта расклада, как и положения 2 карт в прикупе. Поэтому 32! разделим три раза на 10! и еще на 2!

При игре в древнюю китайскую игру НИМ раскладываются *n с*пичек на 3 кучки. Сколько вариантов раскладки этих спичек?

Для определения количества вариантов расклада выпишем подряд n единиц и справа добавим к ним 2 нуля. Переставляя эти объекты всеми возможными способами, мы каждый раз будем получать один из вариантов расклада. Более того, любому варианту расклада можно сопоставить некоторую перестановку из n единиц и двух нулей. Таким образом, получаем:

$$P(n, 2) = (n + 2)!/(n!2!).$$

А теперь определитеколичество количество вариантов расклада, при котором в любой кучке есть хотя бы одна (две, три) спички?

В общем случае, если раскладываются n разных предметов по k ящикам так, чтобы в 1-й ящик (кучку, игроку в руки) попало n_1 предметов, во второй n_2 предмета, в k-й – n_k предметов, при этом $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, то число вариантов расклада

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

1.15. Количество делителей числа *N*

Прежде чем перейти к рассмотрению задачи о количестве делителей произвольного числа, решим вспомогательные задачи. Пусть студенту на сдачу выдали 5 одинаковых рублей, которые он положил в два кармана. Сколько существует вариантов расклада 5 рублей по двум карманам? Построим таблицу расклада.

1-й карман	5 р., 4 р., 3 р., 2 р., 1 р., 0 р.
2-й карман	0 р., 1 р., 2 р., 3 р., 4 р., 5 р.

Итого существует 6 вариантов расклада. Если раскладывается n предметов на 2 кучки, то существует $n + 1$ вариант.

Если раскладываются предметы нескольких типов на 2 кучки (ящики, корзины, множества), то такой расклад выполняется независимо для каждого типа предметов и результаты перемножаются.

П р и м е р. Имеются цветы трех видов: 10 васильков, 15 незабудок, 12 ромашек. Требуется разложить их на 2 букета. Васильки на 2 букета можно разложить 11 способами, незабудки – 16, ромашки – 13 способами. Поскольку расклад каждого вида цветов выполняется независимо, то общее число вариантов расклада будет: $11 \cdot 16 \cdot 13$.

Обобщим полученный результат. Пусть имеется n_1 предметов 1-го типа, n_2 – 2-го, ... n_k – k-го. Требуется разложить эти предметы на 2 кучки.

Тогда полное число вариантов расклада равно $(n_1+1)(n_2+1)...(n_k+1)$.

Пусть имеется некоторое число N. Требуется определить количество делителей N.

Решение. Представим N в канонической форме, т. е. $N = p_1^{n_1} p_1^{n_2},..., p_k^{n_k}$. Тогда задача о нахождении числа делителей N сводится к задаче раскладки степеней простых чисел на 2 делителя: т. е. решение будет: $(n_1+1)(n_2+1)...(n_k+1)$.

П р и м е р. $N = 600 = 2^3 3^1 5^2$. Число делителей равно $(3+1)(1+1)(2+1) = 24$.

Упражнения

1. Сколько делителей имеют числа: 1350, 1617, 8280, 10013?
2. Сколько вариантов при раскладке в домино?
3. Сколько разных ожерелий можно составить из 5 изумрудов, 4 рубинов и 6 сапфиров?
4. В вагон международного поезда, в купе которого имеется 2 дивана по 5 мест на каждом, входит 10 пассажиров. Из вошедших 4 человека хотят сидеть по ходу поезда, 3 против хода, а остальным – безразлично. Сколько вариантов рассадки пассажиров имеется у проводника вагона?

При решении комбинаторных задач для нахождения числа благоприятных комбинаций иногда удобнее вычислить число неблагоприятных комбинаций и вычесть их количество из общего числа комбинаций.

П р и м е р 1. Из n различных чисел требуется отобрать k таких, чтобы в выбранное множество не входили s конкретных чисел. Общее число выборов из n по k:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Выберем теперь s конкретных чисел и остальные доберем C_{n-s}^{k-s} способами. Это будет число неблагоприятных комбинаций. Число благоприятных комбинаций определится разностью

$$C_n^k - C_{n-s}^{k-s}.$$

Пример 2. Из группы в 15 человек нужно отобрать бригаду, в которую должно входить не менее 5 человек. Сколько имеется вариантов выбора?

Подсчитаем число неблагоприятных комбинаций выбора, т. е. составим варианты бригад из 1, 2, 3, 4 человек. Их количество равно:

$$C_{15}^1 + C_{15}^2 + C_{15}^3 + C_{15}^4 = 15 + 105 + 455 + 1365 = 1940.$$

А общее количество бригад равно $2^{15} - 1$. Разность дает число благоприятных комбинаций.

Упражнения

1. Обобщите решение последней задачи, если выбор выполняется из n человек, а в бригаду должно войти не менее k человек.

2. Сколько чисел меньших миллиона можно написать с помощью цифр а) 5, 6, 7; б)3, 0, 9; в) 5, 7 ?

3. Найдите сумму всех трехзначных чисел, которые можно написать с помощью цифр 1, 2, 3, 4. Решите ту же задачу, если никакая цифра не должна повторяться дважды в записи каждого числа.

4. Комиссия из 7 человек хранит свои материалы в сейфе. Сколько должно быть замков на сейфе и сколько должно быть ключей у каждого члена комиссии, чтобы сейф мог быть открыт, если соберутся вместе не менее 4 членов комиссии, но не мог быть открыт при меньшем числе членов комиссии?

Для решения последней задачи можно использовать так называемые “равновесные” коды. Равновесными кодами длины n веса k называются двоичные последовательности длины n, содержащие ровно k единиц (и $n - k$ нулей). Число таких кодов определяется выражением: $P(k, n - k)$. Выпишем, например, все коды длины 5 веса 3:

1) 1 1 1 0 0
2) 1 1 0 1 0
3) 1 1 0 0 1
4) 1 0 1 1 0
5) 1 0 1 0 1
6) 1 0 0 1 1
7) 0 1 1 1 0
8) 0 1 1 0 1
9) 0 1 0 1 1
10) 0 0 1 1 1

Легко заметить, что каждый столбец содержит 6 единиц и 4 нуля. Кроме того, если взять любые два столбца и поставить их рядом, то всегда найдется комбинация 00. Если же взять три любых столбца, то комбинации 000 не будет.

Если теперь считать номера строк 1), 2), …, 10) номерами ключей, а каждый столбец рассматривать как способ выдачи ключей конкретному члену комиссии, то мы получим решение поставленной задачи при 5 членах комиссии и пороговом значении $h = 3$. Если теперь построить таблицу кодов длины 7 веса 4, мы получим решение исходной задачи.

Полученное решение легко обобщить на произвольное число членов комиссии n и произвольный порог h. Действительно, если построить таблицу равновесных кодов длины n веса k, то число ключей будет равно $P(n, n - k) = n!/\ ((n - k)!k!)$, а сейф может быть открыт, если соберется число членов комиссии равное $h = n - k + 1$.

Так, например, пусть $n = 4$, $h = 3$, т. е. число членов комиссии равно 4, а сейф должен открываться, если соберется не менее 3 членов комиссии. В общем случае $k = n - h + 1$.

Для конкретного примера $k = 4 - 3 + 1 = 2$; т. е. нужно построить таблицу равновесных кодов длины 4 веса 2:

1) 1 1 0 0
2) 1 0 1 0
3) 1 0 0 1
4) 0 1 1 0
5) 0 1 0 1
6) 0 0 1 1

Из таблицы видно, что сейф должен иметь в этом случае 6 замков, а ключи должны распределяться в соответствии с таблицей равновесных кодов, т. е. первый член комиссии (первый столбец) получает 1, 2 и 3 ключ, второй член комиссии получает 1, 4 и 5 ключ, третий член комиссии получает 2, 4 и 6 ключ и четвертый член комиссии получает 3, 5 и 6 ключ.

1.16. Раскладка предметов в несколько ящиков

Рассмотрим следующую задачу. Трое мальчиков собрали 40 яблок. Сколько имеется способов раздела яблок между ними?

Напишем 40 единиц и 2 нуля, выполняющих как и ранее функции разделителя, и затем начнем их переставлять всеми возможными способами. Каждой перестановке будет соответствовать некоторый способ раздела 40 яблок на 3 кучки. Каждому способу раздела будет соответствовать некоторый код, содержащий 40 единиц и 2 нуля. Поэтому количество способов раздела:

$$P(40, 2) = 42!/(2!40!) = 861.$$

Если мы раскладываем n_1 предметов 1-го типа, n_2 предметов второго, …, n_k предметов k-го типа на s кучек, тогда

$$P(n_1, s-1)\, P(n_2, s-1) \ldots P(n_k, s-1)\ .$$

Рассмотренный способ раздела содержит комбинации, при которых в какой-либо кучке вообще может не оказаться ни одного предмета, поэтому его можно назвать несправедливым. Для обеспечения более справедливого раздела можно заранее разложить часть предметов по кучкам (ящикам, корзинам), а затем оставшиеся предметы раскладывать описанным несправедливым способом.

Упражнения

1. У человека, спустившегося с гор, есть 5 баранов, которых он хочет раздать своим 8 сыновьям. Ему нужно найти число способов раздачи целых баранов если:

а) каждый сын может получить либо одного барана, либо ничего,

б) число баранов, которые получают сыновья неограниченно (но не более 5).

2. Обобщите решение предыдущей задачи в случаях *а*) и б) при n баранах и k сыновьях.

3. Имеется два множества: A с элементами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и B с элементами $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Требуется составить множество C из элементов множества A и B так, чтобы в множестве C содержалось s элементов, при этом нужно, чтобы в C было не менее p элементов множества A.

Для решения этой задачи предварительно решите следующую: Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин нужно отобрать 6 человек так, чтобы в выбранное множество входило не менее 2 женщин.

1.17. Задача: Флаги на мачтах

Имеется n флагов и k мачт. Сколько разных сообщений можно передать, развешивая флаги на мачтах? В этой задаче важным является не только количество флагов, вывешенных на каждой мачте, но и их порядок.

Сначала будем считать, что все флаги одинаковые. Тогда:

$$P(n, k-1) = (n + k - 1)!/(n!(k - 1)!).$$

Окончательное решение – полученный результат нужно умножить на $n!$ так как после того, как флаги развешены каким-либо способом, можно еще их поменять $n!$ способами, сохраняя количество флагов на каждой мачте.

Количество разных сигналов, получаемых путем развешивания флагов на мачтах, можно еще увеличить, если учитывать варианты, при которых вывешиваются не все флаги, а, например, s флагов из имеющихся n. Тогда общее число расстановок будет

$$\sum_{i=1}^{n} s!P(s, k-1).$$

1.18. Задача: Покупка билетов

Перед кассой по продаже билетов стоит очередь из n владельцев рублей и k владельцев полтинников. Билет стоит полтинник. В каком количестве комбинаций очередь пройдет без задержки, если владелец полтинника, подойдя к кассе, получает билет, а владелец рубля – билет и полтинник на сдачу. В кассе предварительно нет полтинников. Ясно, что задача имеет смысл, если $n \le k$.

Возьмем комбинацию, при которой очередь застрянет и запишем ее следующим образом:

(s – рублей и s – полтинников)P………

Очередь застрянет на рубле, при этом до этого рубля в очереди должно быть одинаковое количество владельцев рублей и полтинников. Добавим спереди полтинник (их станет $k + 1$) и проинвертируем всю комбинацию (заменим рубли на полтинники, а полтинники на рубли) до рубля, на котором очередь застряла (включая и его). Мы придем к комбинации, содержащей n рублей и $k + 1$ полтинник, начинающейся с рубля. Можно взять n рублей и $k + 1$ полтинник (теперь всегда число полтинников строго больше числа рублей) и начать комбинацию с рубля. Обратным преобразованием придем к комбинации, при которой очередь обязательно застрянет.

Таким образом, количество комбинаций, при которых очередь застрянет равно $P(n-1, k+1)$, а общее число комбинаций равно $P(n, k)$; т. е., число благоприятных комбинаций, при которых очередь пройдет без задержки, будет равно

$$P(n, k) - P(n-1, k+1).$$

Например, при $n = 4$ и $k = 5$ число благоприятных комбинаций равно $P(4, 5) - P(3, 4) = 9!/(4!5!) - 7!/(3!4!) = 126 - 35 = 91$.

1.19. Рекуррентные соотношения в комбинаторике

1. Задача о наклейке марок.

Имеются марки достоинством в 4, 6, 10 копеек. На конверт нужно наклеить марки так, чтобы сумма составляла 18 копеек. Будем считать, что порядок наклеиваемых марок важен, т. е. способы наклейки марок достоинством в 4, 10, 4 копейки и 10, 4, 4 разные способы. Тогда можно написать следующее рекуррентное соотношение:

$$F(N) = F(N-4) + F(N-6) + F(N-10),$$

где под $F(N)$ понимается количество вариантов наклейки марок общей стоимостью N. Подсчитаем значения $F(N)$ для некоторых начальных N.

$F(N) = 0$ при $N<0$. $F(0) = 1$. $F(1) = F(2) = F(3) = 0$. $F(4) = 1$. $F(5) = 0$. $F(6) = 1$. $F(7) = 0$. $F(8) = 1$. $F(9) = 0$. $F(10) = 3$. Тогда для $N = 18$ получаем:

$$F(18) = F(14) + F(12) + F(8) = F(10) + F(8) + F(4) + F(8) +$$
$$+F(6) + F(2) + F(8) = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8.$$

2. Задача об уплате долга. В кошельке имеются монеты достоинством в 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50 копеек (по одной штуке). Требуется уплатить долг в 73 копейки.

Запишем рекуррентное соотношение в общем случае, когда монеты имеют достоинства в k_1, k_2, … и k_m копеек и требуется набрать сумму в N копеек:

$$F(k_1, k_2, \ldots, k_m; N) = F(k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}; N-k_m) + F(k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}; N).$$

Первый член правой части учитывает количество комбинаций, в которых монета старшего достоинства использована, второй член – в которых монета старшего достоинства не использована. Для рассматриваемого примера

$$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 50; 73) = F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 73) +$$
$$+F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23).$$

Первый член равен 0, так как сумма оставшихся монет меньше набираемой суммы. Применим ту же рекуррентную формулу к оставшемуся члену. В результате получим:

$F(1, 2, 3, 5, 10, 15, 20; 23) = F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 3) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23)$

В первом члене правой части монеты достоинством в 5, 10 и 15 копеек можно не учитывать, так как достоинство каждой из этих монет больше набираемой суммы, т. е. можно правую часть переписать так:

$$F(1, 2, 3; 3) + F(1, 2, 3, 5, 10, 15; 23) =$$
$$= F(1, 2; 0) + F(1, 2; 3) + F(1, 2, 3, 5, 10; 8) + F(1, 2, 3, 5, 10; 23) =$$
$$= 1 + F(1; 1) + F(1; 3) + F(1, 2, 3, 5; 8) + F(1, 2, 3, 5, 10; 23).$$

Очевидно, что $F(1, 2; 0) = 1$; $F(1, 2; 3) = F(1;1) = 1$; $F(1; 3) = 0$; $F(1, 2, 3, 5, 10; 23) = 0$. Поэтому правая часть перепишется в виде: $1 + 1 + 0 + F(1, 2, 3, 5; 8) + 0 = 2 + F(1, 2, 3; 3) + F(1, 2, 3; 8) = 2 + 2 + 0 = 4$. Таким образом, задача имеет 4 различных решения.

Подчеркнем еще раз, что в этой задаче порядок монет не важен.

3. Задача о размене гривенника (10 копеек). Рассмотрим задачу, в которой сняты ограничения, как на порядок предметов, так и на их количество: размен гривенника монетами достоинством в 1, 2, 3, 5 копеек. Для этого случая рекуррентное соотношение имеет вид

$$S(1, 2, 3, 5; 10) = S(1, 2, 3; 10) + S(1, 2, 3; 5) + S(1, 2, 3; 0).$$

Таким образом все множество решений разбивается на подмножества в зависимости от числа монет старшего достоинства, использованных для размена. Находим все 20 способов размена:

$5 \cdot 2$	$5+1 \cdot 5$	$3+2 \cdot 3+1$	$2 \cdot 4+1 \cdot 2$
$5+3+2$	$3 \cdot 3+1$	$3+2 \cdot 2+1 \cdot 3$	$2 \cdot 3+1 \cdot 4$
$5+3+1 \cdot 2$	$3 \cdot 2+2 \cdot 2$	$3+2+1 \cdot 5$	$2 \cdot 2+1 \cdot 5$
$5+2 \cdot 2+1$	$3 \cdot 2+2+1 \cdot 2$	$3+1 \cdot 7$	$2+1 \cdot 8$
$5+2+1 \cdot 3$	$3 \cdot 2+1 \cdot 4$	$2 \cdot 5$	$1 \cdot 10$

2. СВЯЗЬ КОМБИНАТОРИКИ С ДРУГИМИ РАЗДЕЛАМИ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ И ТЕХНИЧЕСКИМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ

2.1. Теория групп

Рассмотрим группу вращений правильного n – угольника [4]. Порождающим элементом этой группы является перестановка:

$$h = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ a_n a_1 \ldots a_{n-1} \end{pmatrix},$$

все остальные элементы группы могут быть получены возведением последовательно в степени 2, 3, ... n этой перестановки. При этом $h^n = h^0$. Количество таких перестановок (а, следовательно, и число элементов группы) равно n.

Пусть теперь требуется найти число элементов группы, в которой ровно k конкретных элементов не меняют своих позиций, а остальные переставляются произвольно.

Число элементов такой группы равно

$$C_n^k\,(n-k)!$$

Решение в этих двух случаях получено с помощью формул комбинаторики.

2.2. Теория вероятностей

Для оценки вероятности появления какого-либо дискретного события широко применяются комбинаторные методы. Приведем некоторые примеры.

а) Игрок в преферанс хочет рискнуть: объявить и сыграть “мизер”. Для надежной игры ему требуется, чтобы в прикупе оказалась одна из двух семерок, например бубновая или трефовая. Он хочет оценить вероятность такого события. Вероятность события можно определить, разделив количество благоприятных вариантов на общее число возможных вариантов. Подсчитаем количество вариантов, в которых одна из указанных семерок или сразу обе окажутся в прикупе. Положим бубновую семерку в прикуп, а остальные 21 карты распределим так: по 10 карт двум игрокам и одну в прикуп. Количество комбинаций будет равно: 21!(10!10!). Такое же количество комбинаций будет и в случае, когда в прикуп попадет трефовая семерка. Если мы сложим число вариантов в этих 2 случаях, то дважды учтем расклады, при которых обе семерки и бубновая, и трефовая попадут в прикуп, поэтому должны еще вычесть число этих вариантов. Окончательно получим число благоприятных комбинаций: 2(21!/(10!10!) – 20!/(10!10!) = 41 · 20!/(10!10!). Подсчитаем теперь общее число вариантов (учитываем, что 10 карт находятся у игрока, который хочет сыграть мизер). Общее число вариантов равно: 22!/(10!10!2!). Вероятность благоприятного события: P = 0,177. Рискнуть можно, но шансов на успех мало.

б) Из-за недостатка времени криптоаналитик может сделать только 1000 попыток для расшифровки сообщения, ключ от которого ему неизвестен. Однако известно, что используется рюкзачный вектор, состоящий из 100 чисел, при этом сумма порождается 4 числами. Требуется оценить вероятность того, что за 1000 попыток вскрыть шифр, он это сумеет сделать.

Определим сначала общее число комбинаций, которые следовало бы перебрать криптоаналитику: C_{100}^{4} = 100!/(4!96!). Однако благоприятной комбинацией является только одна. Следовательно, вероятность вскрытия шифра за одну попытку

$$P = 24/94109400 = 0{,}000000255.$$

Вероятность того, что криптоаналитик вскроет неизвестный шифр за 1000 попыток:

$$P(1000) = 1 - (1 - 0{,}\ 000000255)^{1000} = 0{,}0003.$$

в) Электромонтажник распаивает разъем на 8 контактов, не имея монтажной схемы, т. е. случайным образом. Определить:

1. Вероятность того, что все провода будут припаяны правильно.

2. Вероятность того, что из 8 проводов ровно 3 провода будут припаяны правильно, а остальные неверно.

Для решения задачи сначала определим общее число перестановок 8 проводов. Оно равно 8! = 40320. Для решения 1-й части задачи отметим, что имеется всего одна благоприятная комбинация, поэтому вероятность распаять разъем правильно, не имея монтажной схемы, равна P = 1/40320 = 0,0000248. Для решения второй части задачи число благоприятных комбинаций значительно больше и определяется как $P = C_8^3 \cdot D_5 = 56 \cdot 44 = 2464$. Поэтому вероятность припаять правильно ровно 3 провода из 8 равна P = 2464/40320 = 0,061.

2.3. Криптография

При исследовании любых криптографических систем используются комбинаторные методы. Они позволяют найти количество комбинаций для расшифровки сообщения и поэтому являются важным инструментом криптоаналитика.

Рассмотрим, например, простейшую классическую криптографическую систему, называемую системой Цезаря. В этой системе производится замена букв по определенному правилу. Сначала в первой строке выписываются подряд все буквы алфавита. Затем формируется нижняя строка, составленная из тех же букв, расположенных в том же порядке, но со сдвигом на s позиций. Для оценки затрат криптоаналитика по подбору шифра замены требуется вычислить количество вариантов ключей (т. е. сдвигов). Это число равно количеству букв n в алфавите. Для латинского алфавита $n = 26$, для русского алфавита $n = 33$, поэтому криптоаналитик должен перебрать соответствующее число разных ключей, т. е. рассмотреть все шифры замены, получаемые всевозможными сдвигами букв алфавита, т. е. 26 или 33 элемента группы сдвига.

Криптосистема *DES* оперирует с ключом, состоящими из 56 бит. Криптоаналитик для вскрытия шифра должен перебрать все 2^{56} варианта ключей (если учитывать ключи, состоящие из одних нулей и одних единиц). Если же имеется дополнительная информация об используемых характеристиках ключей, перебор может быть существенно уменьшен с помощью комбинаторных методов.

Рюкзачная криптосистема с открытым распределением ключей имеет дело с вектором $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. При шифровании сообщений открыто передаются значения сумм некоторых элементов a_i, при этом криптоаналитику часто бывает известно количество элементов и их сумма (но не известны сами элементы). Для вскрытия шифра криптоаналитик должен перебрать число ключей, равное числу сочетаний из n по k.

2.4. Экономика

Рассмотрим следующую задачу. Некоторый банк имеет 5 миллионов рублей, которые может выдать клиентам в виде кредитов. Предположим, что кредиты хотят получить 8 клиентов банка (заемщики). Правление решает выдавать кредиты, кратные 0,25 миллиона. Требуется определить, сколько различных способов выдачи кредита существует. Комбинаторика, конечно, не позволяет решить вопрос о том, каким клиентам и какой кредит следует выдать. Она только позволяет подсчитать количество вариантов. Для данного условия задачи найдем сначала количество квот (частей по 0,25 миллиона в каждой), содержащихся в 5 миллионах. Для этого разделим 5 на 0,25, получим 20. Выпишем теперь подряд 20 единиц и справа к ним припишем 7 нулей. Начнем переставлять цифры полученного кода всеми возможными способами. Одна из таких перестановок может выглядеть так: 111110111001001111111110011. Такой перестановке будет соответствовать следующий вариант раздачи кредитов:

1-й	заемщик получит	1,25 миллиона,
2-й	–	0,75 миллиона,
3-й	–	0,
4-й	–	0,25 миллиона,
5-й	–	0,
6-й	–	2,25 миллиона,
7-й	–	0,
8-й	–	0,5 миллиона.

Заметим, что каждой перестановке будет соответствовать некоторый способ раздачи кредитов и каждому способу раздачи будет соответствовать некоторый код, состоящий из 20 единиц и 7 нулей. Таким образом, число вариантов раздачи кредитов

$$P(20, 7) = 27!/(20!7!) = 888030.$$

Число это достаточно велико и невозможно выписать все варианты для их последующей оценки по другим, уже экономическим критериям. Поэтому следует предварительно сократить число вариантов, используя некоторые простые критерии отбора.

2.5. Теория информации

Теория информации исследует математические описания и оценки качества передачи, хранения, извлечения и классификации информации.

В 1948 году К. Шеннон (*K. Shannon*) обосновал целесообразность использования количественной меры информации, что позволило ему сформулировать фундаментальную теорему о нахождении скорости передачи информации по каналам связи, которую можно достичь при некотором оптимальном методе кодирования и декодирования, обеспечив при этом сколь угодно малую вероятность ошибки. Количественная мера информации *энтропия* является мерой степени неопределенности случайной величины. Пусть некоторая случайная величина ξ принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с распределением вероятностей $p_1, p_2, \ldots, p_n$. В этом случае энтропия случайной величины ξ определяется формулой

$$H(\xi) = \sum_{k=1}^{n} P_k \log P_k .$$

При передаче сообщений в каналах связи применяются различные методы кодирования информации, которые строятся с использованием комбинаторных методов.

Учет вероятностей ошибок типа $0 \to 1$ и $1 \to 0$ и энтропийная оценка позволяют сравнивать различные методы кодирования и декодирования по достоверности получаемых сообщений.

2.6. Распознавание образов

При принятии решений и оценке их качества широко применяются комбинаторные методы. При информационном поиске, нозологии (классификации болезней) и таксономии (классификации видов животных и растений) широко применяются наборы двоичных признаков. При этом каждый класс характеризуется некоторым двоичным вектором и областью изменения этого вектора, что в совокупности составляет *кластер*. Расстояние между центрами кластеров, а также от классифицируемого вектора до центров всех кластеров определяется мерой сходства, называемой мерой Танимото:

$$\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \frac{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} + \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} - \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}},$$

где X, Y – двоичные векторы, X^{T}, Y^{T} – транспонированные векторы (векторы-строки).

При вычислении признаков возможны ошибки, которые искажают истинное значение вектора и могут привести к неверной классификации. При этом одиночная ошибка приводит к искажению любого одного разряда двоичного вектора, двойная – любых двух разрядов и т. д. Пусть для классификации выбрано n двоичных признаков, а предварительные эксперименты показывают, что одиночные, двойные и даже тройные ошибки имеют заметную величину, а ошибками большей кратности можно пренебречь из-за их малой вероятности. Оценим размеры кластеров и найдем грубую оценку возможного числа кластеров при наличии n признаков.

Вектор одиночной ошибки представляет собой двоичный n-разрядный код, содержащий одну единицу (остальные разряды нулевые). Вектор двойной ошибки содержит две единицы, вектор тройной ошибки – 3 единицы. Общее число векторов одиночных, двойных и тройных ошибок равно:

$$C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 \; .$$

Если умножить полученное значение числа векторов ошибок на возможное число кластеров, то произведение должно быть существенно меньше, чем общее количество n-разрядных векторов. Из этих рассуждений получаем оценку:

$$\left(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3\right)K < 2^n.$$

Откуда число возможных кластеров

$$K < 2^n \Big/ \left(C_n^1 + C_n^2 + C_n^3\right).$$

Так, при $n = 10$ число кластеров $K \ll 7$.

Аналогичные оценки используются для определения границ в теории кодирования.

Упражнения

1. Вектор двоичных признаков содержит 12 компонент (12-разрядный двоичный вектор). Одиночная ошибка искажает вектор. Сколько различных ошибочных векторов при этом может быть получено? Для конкретного вектора: 100111010010 выпишите все ошибочные векторы.

2. На кодовое слово длины 16 действует пакет ошибок (ошибки группируются подряд, но не превышают 5 разрядов). Подсчитайте число возможных искажений кодового слова. Обобщите результат на n-разрядное кодовое слово и на максимальный размер пакета ошибок в k разрядов.

3. Пусть имеются два вектора, соответствующие центрам кластеров: X: 10111001 и Y: 00101111. Вычислите меру Танимото, определяющую расстояние между этими кластерами. Если вектор X принять за исследуемый вектор, а в векторе Y допускать одиночные искажения признаков, то можно определить минимальное расстояние до границ кластера. Найдите все векторы кластера с центром Y и определите минимальное расстояние между X и “ближайшим” к нему вектором из кластера Y.

2.7. Теория графов

Теория графов относится к области дискретной математики и занимается изучением геометрических связей между объектами. Основным объектом теории является граф, однако при решении многих задач в XX веке широко стали применяться другие термины: карта, сеть, комплекс, диаграмма, лабиринт. Теория графов тесно связана с различными разделами математики: топологией, алгеброй, теорией вероятностей, теорией чисел и, конечно, с комбинаторикой.

Приведем некоторые примеры задач теории графов, которые решаются комбинаторными методами.

1. Имеется n участников шахматного турнира. Сколько партий должно быть сыграно, чтобы каждый участник сыграл со всеми остальными? Любой турнир между n участниками (командами) может быть представлен в виде графа, при этом после окончания турнира граф является полным. Каждый участник (вершина графа) играет со всеми остальными (их число $n - 1$), а поскольку число участников равно n, то всего игр $n(n - 1)/2$.

2. Комбинаторные задачи сортировки часто изображаются в виде графов типа “дерево”.

3. Не решенная аналитически задача Гамильтона об обходе всех вершин связного графа в точности по одному разу для определения числа шагов упорядоченного перебора использует комбинаторные оценки.

Заключение

Классы задач, решаемых комбинаторными методами, исключительно разнообразны. Существует даже мнение, что человека нельзя научить решать все встречающиеся комбинаторные задачи, поэтому не стоит на это тратить время. Первое отчасти справедливо, со вторым я категорически не согласен. Человека можно познакомить с методами решения основных классов задач, которые уже решены, и развить интуицию, что позволит ему решать новые задачи в новых приложениях. Область применения комбинаторных методов настолько велика, что даже перечисление всех возможных мест использования комбинаторного языка является нереальным. В настоящем пособии выбрано только несколько таких областей, приведенные в них примеры не претендуют на полноту и являются далеко не самыми лучшими и яркими.

Настоящее пособие знакомит читателя только с начальными сведениями комбинаторики и методами решения простейших комбинаторных задач. Для серьезного изучения методов комбинаторики целесообразно использовать литературу [2, 3].

Библиографический список

1. *Виленкин Н. Я.* Популярная комбинаторика. М.: Наука, 1975. 208 с.

2. *Риордан Дж*. Введение в комбинаторный анализ: Пер. с англ. М.: Иностранная литература, 1963. 287 с.

3. *Холл М.* Комбинаторика: Пер. с англ. М.: Мир, 1970. 424 с.

4. *Ерош И. Л*. Элементы теории дискретных групп: Учеб. пособие/ СПбГУАП. СПб., 1998. 38 с.

5. *Ту Дж., Гонсалес Р.* Принципы распознавания образов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 412 с.

Оглавление

Учебное издание

Ерош Игорь Львович

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. КОМБИНАТОРИКА

Учебное пособие

Редактор *В. П. Зуева*
Компьютерная верстка *Ю. С. Бардуковой, А. Н. Колешко*

Лицензия ЛР №020341 от 07.05.97. Сдано в набор 04.12.00. Подписано к печати 28.04.01 Формат 60×84 1/16. Бумага тип. №3. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,09. Усл. кр.-отт. 2,22. Уч. -изд. л. 2,25. Тираж 100 экз. Заказ №

Редакционно-издательский отдел
Лаборатория компьютерно-издательских технологий
Отдел оперативной полиграфии
СПбГУАП

190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67

В серии Дискретная математика готовятся к изданию и вышли в свет:

Ерош И. Л. Элементы теории дискретных групп. СПб. 1998.

Ерош И. Л. Дискретная математика. *Теория чисел.* СПб. 2001.

Ерош И. Л. Дискретная математика. *Математические вопросы криптографии.*

Ерош И. Л. Дискретная математика. *Комбинаторика.*

Ерош И. Л. Дискретная математика. *Булева алгебра. Комбинационные схемы. Преобразование двоичных последовательностей.*

Ерош И. Л. Дискретная математика. *Теория графов.*

Ерош И. Л. Дискретная математика. *Дискретный спектральный анализ.*