

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. Ф. ИОФФЕ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Д. А. Паршин, Г. Г. Зегря

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(конспект лекций по общему курсу физики)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Введение. Макромир и микромир. Их взаимосвязь. Современная картина мира

Физика — это наука о природе. Она возникла из стремления понять и описать окружающий нас мир. Мир наш необычайно сложен и интересен: Солнце, Луна, приливы и отливы, день и ночь, море, облака, шум деревьев, ветер, горы, землетрясения, дождь, животный и растительный мир, наконец человек — венец творения природы (а может быть, и нет). Человек как часть этого мира пытается понять, как он устроен. Возможно ли это? Мы знаем, что ответ на этот вопрос положителен. Из нашего собственного опыта мы знаем, что мир познаваем и что многое известно об основных физических законах, которые приводят к тому многообразию явлений, которое нас окружает.

Что же мы знаем? Пожалуй, самое важное, к чему мы пришли, — это то, что все окружающие нас тела состоят из **атомов**¹. Атомы являются кирпичиками мироздания, они находятся в непрерывном движении, притягиваются на больших расстояниях, но отталкиваются, когда мы стремимся приблизить их друг к другу. Размер атома $\approx 10^{-8}$ см = 1 Å (если яблоко увеличить до размеров Земли, то атомы яблока сами станут размером с яблоко). Например, молекула воды H₂O состоит из двух атомов водорода и одного атома кислорода.

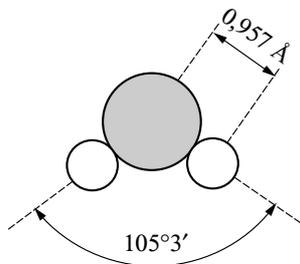


Рис. 1.1. Молекула воды, H₂O.

Можно ли увидеть атом? Можно — в туннельный микроскоп (1981 г.)². “Глядя” в такой микроскоп, мы можем пересчитывать их поштучно, как яблоки.

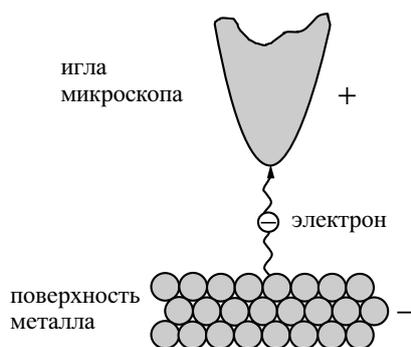


Рис. 1.2. Туннельный микроскоп. Туннельный ток зависит от расстояния между иглой и поверхностью.

Какая польза от того, что мы знаем, что мир состоит из атомов? Например, тогда можно понять, почему существуют твердые, жидкие и газообразные тела, с какой скоростью распространяется звук, почему летает самолет, что такое температура и многое, многое другое.

А из чего состоят атомы? Атомы состоят из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов. Размер электрона до сих пор не поддается измерению. Известно лишь, что радиус электрона заведомо меньше 10^{-16} см. Размер ядра намного больше,

¹Исключение составляют Солнце и звезды, где вещество находится в состоянии плазмы.

²В обычный микроскоп атомы увидеть нельзя, так как нельзя увидеть объект размером меньше длины световой волны $\lambda \cong 0,5 \text{ мкм} \cong 5000 \text{ Å}$.

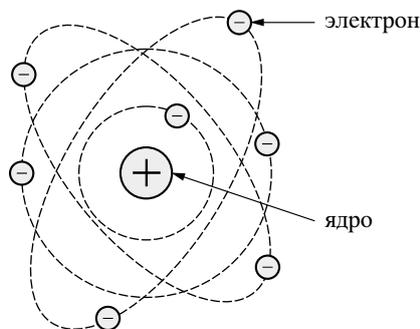


Рис. 1.3. Структура атома.

порядка $10^{-4} \div 10^{-5} \text{ \AA} = 10^{-12} \div 10^{-13} \text{ см}$. В свою очередь, ядра состоят из протонов и нейтронов. Вся масса атома сосредоточена в ядре. Электрон почти в 2000 раз легче протона и нейтрона:

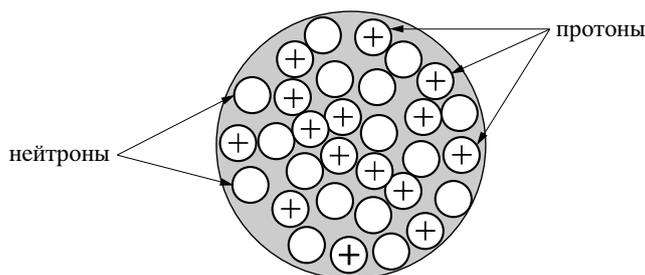


Рис. 1.4. Структура ядра.

$$m_p \approx m_n \approx 1,67 \cdot 10^{-24} \text{ г.} \quad (1.1)$$

Можно задать следующий вопрос. А из чего состоят протоны и нейтроны? Ответ известен. Они состоят из кварков. А электрон? Сам по себе он ни из чего не состоит. Однако мы остановимся пока на этом и не будем продолжать задавать вопросы о том, что из чего состоит. Таким образом можно достаточно быстро подойти к границе неизведанного, после чего остается лишь повторять: “Не знаю, не знаем” и т.д. Вернемся поэтому к атомам.

Атом пуст. Если ядро атома увеличить до размеров яблока, то расстояние от ядра до других электронов будет порядка 1 км. Если бы электроны и ядра не были заряжены, атомы спокойно проходили бы друг через друга, нисколько не мешая соседу.

Где все это находится? “Большой ящик”, где разыгрываются все явления природы, называется **Вселенной**. Размеры Вселенной порядка $10^{28} \text{ см} \approx 10^{10}$ световых лет³. Для сравнения, расстояние от Земли до Солнца равно $1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ (150 млн. км.), а радиус Земли равен $6,4 \cdot 10^8 \text{ см}$ (6400 км). Общее число протонов и нейтронов во Вселенной равно 10^{80} ($10^{78} \div 10^{82}$). В составе Солнца $\approx 10^{57}$ протонов и нейтронов, в составе Земли — $4 \cdot 10^{51}$. Число звезд с массой порядка массы Солнца, M_{\odot} , равно примерно $10^{80} / 10^{57} \sim 10^{234}$. Звезда имеет массу от 0,01 до $100 M_{\odot}$.

Все состоит из атомов, в том числе и мы с вами. Жизнь — это наиболее сложное явление во Вселенной. Человек, одно из наиболее сложно устроенных живых существ, состоит из $\approx 10^{16}$ клеток. Клетка представляет собой элементарную физиологическую ячейку, содержащую $10^{12} \div 10^{14}$ атомов. В любую клетку любого живого организма входит хотя бы одна длинная молекулярная нить ДНК (дезоксирибонуклеиновой кислоты). В молекуле ДНК $10^8 \div 10^{10}$ атомов, точное расположение которых может изменяться от индивидуума к индивидууму. Можно сказать, что молекула ДНК является носителем генетической информации.

Неотделимым от атомов является понятие **взаимодействия**. Чем атомы скрепляются между собой в твердом теле, почему Земля движется вокруг Солнца по круговой орбите, не улетая от него (или почему яблоко падает на Землю)? Наконец, почему протоны в ядре (положительно заряженные частицы, которые электрически отталкиваются друг от друга) не разлетаются? Что держит их вместе? В настоящее время в природе обнаружено четыре основных вида взаимодействия:

- **электромагнитное,**

³Один световой год равен расстоянию, которое свет проходит за год. Это составляет примерно $9,5 \cdot 10^{12} \text{ км} \approx 10^{18} \text{ см}$.

⁴Оценить с помощью этих чисел среднее расстояние между звездами (ответ: ~ 100 световых лет).

- гравитационное,
- сильное и
- слабое.

Первое обуславливает взаимодействие между заряженными частицами. Когда вы пальцем пытаетесь продавить стол, вы имеете дело со взаимодействием электромагнитной природы. Есть притяжение и отталкивание.

Гравитационное взаимодействие, основным проявлением которого является закон всемирного тяготения, — всегда притяжение (гравитационное отталкивание пока не обнаружено). Свидетельством этого являются те же яблоки, которые всегда падают на Землю (к счастью, не всегда на голову)⁵. Притяжение между Землей и Солнцем заставляет Землю двигаться по круговой орбите вокруг Солнца. Сила тяжести — это та сила, которая заставляет загораться звезды. Она сообщает ядрам атомов необходимую для сближения кинетическую энергию (для преодоления силы электрического отталкивания), чтобы началась реакция термоядерного синтеза — основной источник энергии большинства звезд во Вселенной.

Сильное взаимодействие, в отличие от первых двух, является короткодействующим. Радиус его действия порядка $10^{-12} \div 10^{-13}$ см, то есть порядка размеров ядра атома. Это взаимодействие между нуклонами, протонами и нейтронами, и оно всегда имеет характер притяжения⁶.

Наконец, последнее взаимодействие — это слабое взаимодействие. Посредством слабого взаимодействия реагирует с веществом такая неуловимая частица, как нейтрино. В полете сквозь космическое пространство, столкнувшись с Землей, она этого не замечает и прошивает ее насквозь. Примером процесса, в котором проявляется слабое взаимодействие, является так называемый β -распад нейтрона. С учетом слабого взаимодействия свободный нейтрон нестабилен и распадается на протон, электрон и антинейтрино примерно через 15 минут:



В последнее время благодаря усилиям теоретиков удалось объединить электромагнитное и слабое взаимодействия в одно, что уменьшает число основных взаимодействий до трех. Сравнительная сила этих взаимодействий такова: если считать, что относительная величина взаимодействия нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре равна единице, то следующим по силе будет электромагнитное взаимодействие, 10^{-2} , затем слабое, 10^{-5} . И самым слабым в этом смысле является гравитационное взаимодействие, $\sim 10^{-40}$.

Природа сильного взаимодействия все еще остается не вполне понятной. Точнее, его теория все еще не построена. Тем не менее, человечество уже научилось использовать ядерные силы, создав атомную бомбу. На самом деле правильнее называть ее ядерной бомбой, так как взрыв бомбы обусловлен процессами, происходящими в ядрах атомов, — делением и слиянием этих ядер. Природа давно научилась использовать эти силы. Термоядерная реакция на Солнце — источник тепла на Земле, причина свечения звезд в ночном небе, благодаря которому мы видим звезды, находящиеся от нас на расстоянии в тысячи и миллионы световых лет.

Одним из важнейших понятий, введенных в современную физику, является понятие **поля**. Пространство, в котором нет частиц и которое поэтому можно назвать “пустым”, на самом деле таковым не является. В “пустом” (от частиц) пространстве могут существовать различные поля, примером которых является электромагнитное поле. Эти поля могут существовать и вполне самостоятельно, независимо от частиц, их породивших. Эта форма существования — теперь хорошо известные волны. Электромагнитные волны вошли в нашу повседневную жизнь. Радио и телевидение кажутся нам столь же естественными, как и автомобиль.

Гравитационные волны пока еще не обнаружены экспериментально, но их существование уверенно предсказывает общая теория относительности Эйнштейна. И по-видимому, их обнаружение не за горами. Уже сейчас реально создание сверхчувствительных детекторов гравитационных волн, которые способны зарегистрировать взрыв сверхновой в галактике, удаленной от нас на расстояние в миллионы световых лет. И тогда одновременно со вспышкой света до нас дойдет гравитационная волна, которая тоже распространяется со скоростью света. Совпадение во времени этих событий было бы убедительным доказательством существования гравитационных волн.

Однако вернемся на Землю. Какие взаимодействия определяют все многообразие явлений на Земле? Гравитационное взаимодействие является очень слабым, однако оно обеспечивает то, что мы не улетаем с этой “сцены” Земли в космическое пространство, то есть тяготение важно в том смысле, что оно удерживает на поверхности Земли воду, воздух и нас с вами. Ядерные силы на Земле, слава

⁵Тот факт, что яблоки падают на Землю, заставляет предположить, что они к Земле притягиваются.

⁶Отталкивание на очень малых расстояниях.

Богу, проявляются не слишком сильно, иначе связанная с ними гигантская энергия уничтожила бы все живое, как взрыв атомной бомбы “Малыш”, сброшенной на Хиросиму 6 августа 1945 г., погубил в первые же секунды до ста тысяч человек.

Таким образом, основной движущей силой почти всех происходящих на Земле процессов являются электромагнитные силы и явления, ими вызываемые. Знание этих сил является основой для понимания химических реакций, биологических процессов, а значит и жизни, движения воздуха, воды и даже землетрясений. В последних трех случаях гравитационные силы, несомненно, играют важную роль, например конвективные потоки воздуха в атмосфере. И все это скрывается в такой крошечной частичке, как атом, который состоит из положительно заряженного ядра и движущихся вокруг него отрицательно заряженных электронов.

Но почему, спросите вы, электроны не падают на ядро, ведь они к нему притягиваются? И чем вообще определяется столь малый размер атома ($\approx 1 \text{ \AA}$)? Можно было бы думать, что причина та же, что и при вращении Земли вокруг Солнца. Земля вращается и не падает. Но тут есть одна серьезная проблема. Дело в том, что электрически заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Так устроены радио- и телепередающие антенны — по ним пропускают переменный ток и они излучают в пространство электромагнитные волны, которые мы ловим своими телевизорами и приемниками. Эти волны уносят с собой энергию. В результате электрон должен в конце концов свалиться на ядро, а этого не происходит — атом относительно устойчив (наше с вами существование — тому доказательство). В чем же причина стабильности атома? Дело в том, что законы, управляющие движением электрона относительно ядра атома, — это не те законы классической механики, которые управляют движением Земли вокруг Солнца. В атоме действуют законы квантовой механики.

Квантовая механика, или **квантовая физика** — одно из величайших научных достижений нашего века. Она описывает законы движения частиц в микромире, то есть движения частиц малой массы (электрона или атома) в малых участках пространства. Квантовая механика — это более общая наука, включающая в себя классическую механику как частный случай. К чему же сводится основное утверждение квантовой механики? Оно сводится к тому, что частицы не могут иметь одновременно определенные значения координаты и импульса, то есть в квантовой механике не существует понятия траектории частицы. Если Δx — это неопределенность координаты частицы, а Δp — неопределенность ее импульса, то эти величины в квантовой механике ограничены неравенством

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \quad (1.3)$$

(Гейзенберг, 1927 г.), где \hbar — это так называемая постоянная Планка,

$$\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}. \quad (1.4)$$

Это соотношение, называемое **соотношением неопределенности**, говорит нам о том, что если бы электрон упал на ядро (а оно ведь очень маленькое), то мы знали бы его координату и $\Delta x = 0$. Но отсюда следует, что в этом случае неопределенность импульса Δp была бы равна ∞ (бесконечности) и электрон с такой энергией вылетел бы из ядра снова, преодолев силы притяжения. Невозможность локализации электрона является в конечном итоге следствием того, что на самом деле электрон — не частица, а волна⁷ с длиной волны

$$\lambda = \frac{\hbar}{p}, \quad (1.5)$$

где p — импульс (так называемая волна де Бройля). А как известно, волну нельзя локализовать в пространстве с размерами, меньшими ее длины волны.

Давайте оценим размер атома. Для этого воспользуемся соотношением неопределенности $\Delta r \Delta p \approx \hbar$, где Δr — неопределенность координаты электрона, а Δp — неопределенность его импульса. По порядку величины $\Delta r \approx r$ и $\Delta p \approx p$, где r — характерное расстояние электрона от ядра (то есть размер атома), а p — характерное значение импульса электрона. При движении в кулоновском поле потенциальная энергия порядка кинетической энергии. Поэтому имеем два соотношения для определения p и r :

$$\begin{cases} \frac{e^2}{r} \approx \frac{p^2}{2m}, \\ r \cdot p \approx \hbar. \end{cases} \quad (1.6)$$

⁷Лучше все-таки считать, что электрон — частица, но с несколько не обычными для нее свойствами, делающими его похожим на волну.

Из первого условия получаем, что $p \approx \sqrt{2me^2/r}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, находим, что

$$r \approx \frac{\hbar^2}{2me^2}. \quad (1.7)$$

Приблизленно $\hbar \approx 10^{-27}$ эрг·сек, $m \approx 10^{-27}$ г и $e \approx 5 \cdot 10^{-10}$ СГСЕ. Подставляя это в формулу (1.7), получаем

$$r \approx \frac{10^{54}}{10^{-27} \cdot 25 \cdot 10^{-20}} \text{ см} = \frac{10^{-7}}{25} \text{ см} = 0,4 \text{ \AA}. \quad (1.8)$$

Таким образом, атом устойчив (а вместе с ним и мы с вами) благодаря существованию принципа неопределенности. Квантовая механика необходима для понимания химических и биологических процессов, а значит для понимания того, как мы устроены. Однако вследствие ее относительной сложности начинать следует с более простых вещей — с классической механики, к изучению которой мы сейчас и приступаем.

“Наблюдение, размышление и опыт — вот что составляет так называемый научный метод”.

Р. Фейнман, ФЛФ.

Границы применимости классической механики. Кинематика. Пространственно-временные системы отсчета. Основы векторной алгебры. Перемещение, скорость и ускорение материальной точки. Равноускоренное движение. Путь

Раньше других разделов физики стала развиваться **механика**. **Механика есть наука о движении и равновесии тел**. В широком смысле слова движение материи есть всякое ее изменение. Однако в механике под движением понимается только простейшая его форма, а именно перемещение тела относительно других тел. Принципы механики были впервые сформулированы Ньютоном (1643–1727 гг.) в его основном труде “Математические начала натуральной философии” (1687 г.).

После Ньютона механика начала быстро развиваться, однако до начала XX века это развитие шло в основном в направлении совершенствования математических методов механики и применения ее законов ко все новым и новым областям знания. Несомненные в то время успехи механики привели к представлению, что законов механики достаточно для объяснения всех явлений природы (**механистический взгляд на природу вещей**).

Положение в корне изменилось с открытием электрических и магнитных явлений, особенно с открытием электромагнитных волн. И их, конечно, пытались объяснить механистически, как волны в некоторой пронизывающей все пространство среде, называемой **эфиром** (как волны на поверхности воды или звук в воздухе). Однако эти попытки не увенчались успехом.

Окончательный отказ от механистических представлений произошел в начале XX века. Первое, что выяснилось, — это то, что механика Ньютона применима лишь к сравнительно медленным движениям со скоростями, заметно меньшими скорости света в вакууме $c \approx 300000$ км/с. Движения, скорости которых приближаются к скорости света, называют **релятивистскими**. Но скорость света огромна. В повседневной жизни мы имеем дело со скоростями, заметно меньшими. Так, скорость реактивного самолета может в 2–3 раза (обычно не больше) превысить скорость звука в воздухе, $v \approx 300$ м/с = 0,3 км/с¹. Скорость спутника или космического корабля порядка 10 км/с. Такого же порядка скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца (30 км/с). Наконец, скорость движения Солнца по своей орбите вокруг центра нашей Галактики (кстати, ее называют Млечным путем) порядка 300 км/с, что меньше скорости света в 1000 раз.

Второе ограничение классической механики заключается в ее неприменимости к описанию явлений микромира, то есть к движениям тел малой массы в малых участках пространства. Более общей наукой, описывающей такие движения, является квантовая механика, согласно которой неопределенность в знании значений координат и импульса определяется соотношением неопределенности Гейзенберга

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2. \quad (2.1)$$

В применении к обычным телам, например к футбольному мячу весом 0,5 кг, движущемуся со скоростью 30 м/сек, с хорошей точностью применима механика классическая. Так, если мы не знаем скорость с точностью выше, чем $\Delta v = 10^{-3}$ мкм/с (то есть $\Delta v/v = 3 \cdot 10^{-11}$ — огромная точность), а $\Delta x \approx 10^{-3}$ мкм (10 Å), то $\Delta p \cdot \Delta x \approx 5 \cdot 10^{-12}$ эрг · сек $\gg \hbar \approx 10^{-27}$ эрг · сек. Таким образом, классическая механика Ньютона изучает медленные движения макроскопических тел.

Что такое движение и как его описывать? На этот вопрос отвечает **кинематика**, описывающая движение тел. Движение — это перемещение тела относительно других тел (изменение его положения в пространстве). Таким образом, описывая движение тела, мы всегда привязываемся к какой-то координатной системе, относительно которой тело движется², или к **системе отсчета**. Движение тела определяется движением всех его точек (маленьких кусочков тела), поэтому мы начнем с описания движения **материальной точки**.

Материальной точкой называется тело, размерами которого можно пренебречь, считая, что вся масса тела сосредоточена в одной точке.

¹Такого же порядка скорость точки на поверхности Земли при ее вращении вокруг своей оси (≈ 470 м/с).

²Например, сидя в вагоне едущего поезда, мы не движемся относительно вагона, но вместе с ним движемся относительно Земли и т.д.

Прежде всего, выберем систему координат. Самая простая система — это **декартова система координат**, три взаимно перпендикулярных оси x , y , z . Различают два вида координатных систем: правую и левую (рис. 2.1). Никаким пространственным поворотом их нельзя совместить друг с дру-

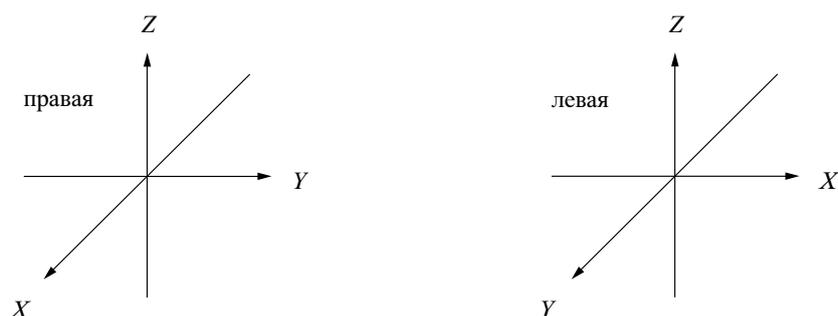


Рис. 2.1. Правая и левая декартовы системы координат.

гом, как нельзя вложить правую перчатку в левую. Но если перчатку вывернуть, то последнее оказывается возможным. Так и левая система переходит в правую при изменении направления одной из осей, например оси x , на противоположное ($x \rightarrow -x$) (рис. 2.2). После этого обе системы можно

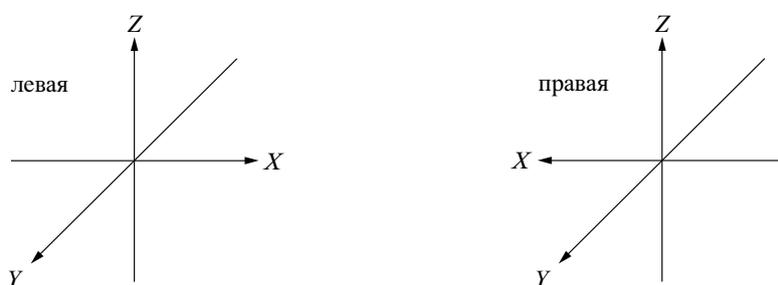


Рис. 2.2. Переход левой системы координат в правую при изменении знака одной из осей $x \rightarrow -x$.

совместить взаимным поворотом и перемещением в пространстве. Такая операция (замена $x \rightarrow -x$) называется **зеркальным отражением**. И именно поэтому левая система координат в зеркале кажется правой.

Левая система координат переходит в правую также и при изменении направления всех трех координатных осей ($x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$) с последующим поворотом. Такая операция (изменение

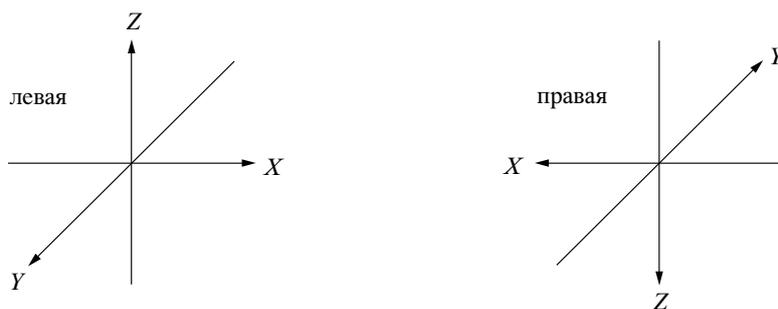


Рис. 2.3. Операция инверсии.

знака всех трех осей) называется **инверсией** (см. рис. 2.3).

Законы природы, очевидно, должны быть записаны в форме, которая не зависит от выбора системы координат. Мы для определенности будем пользоваться правой системой. Положение точки в выбранной нами системе координат задается **радиус-вектором**³ \mathbf{r} , проекции которого на оси координат равны соответственно x , y , z . Таким образом, вектор \mathbf{r} вполне однозначно определяется заданием трех его проекций, хотя это могут быть и другие три числа, например длина r и два угла θ и φ (так называемая **сферическая система координат**) (рис. 2.4). Декартовы координаты со сферическими

³В школьном курсе физики вектор — это физическая величина, характеризующаяся своей длиной и направлением в пространстве. Сложение векторов осуществляется по правилу параллелограмма.

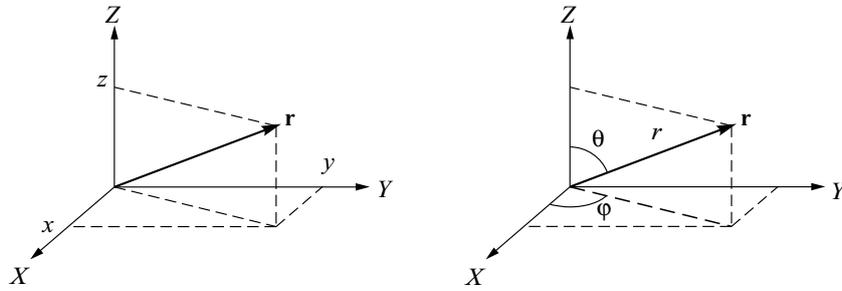


Рис. 2.4. Радиус-вектор в декартовой и сферической системах координат.

связаны друг с другом соотношениями

$$\begin{cases} z = r \cos \theta, \\ x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi. \end{cases} \quad (2.2)$$

Если ввести три единичных вектора \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , направленные вдоль координатных осей (**единичные орты**), то радиус-вектор \mathbf{r} можно представить в виде суммы трех векторов:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad |\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1. \quad (2.3)$$

Это следует из известного еще в школе закона сложения векторов по правилу параллелограмма (рис. 2.5).

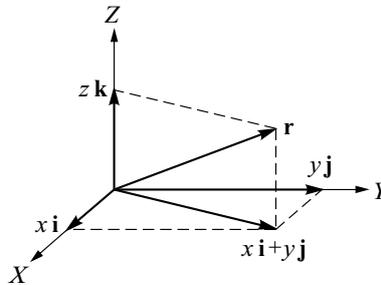


Рис. 2.5. Разложение радиус-вектора на составляющие вдоль координатных осей.

Длину вектора \mathbf{r} можно найти, скалярно умножив его на себя самого. Вы знаете еще со школьных времен, что скалярным произведением двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} называется число

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos(\widehat{\mathbf{AB}}), \quad (2.4)$$

равное произведению длин векторов на косинус угла между ними. Очевидно, что если два вектора перпендикулярны друг другу, то их скалярное произведение равно нулю. Скалярное произведение радиус вектора \mathbf{r} на себя самого равно

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}| |\mathbf{r}| \cos(\widehat{\mathbf{r}\mathbf{r}}) = r^2, \quad (2.5)$$

так как $\cos(\widehat{\mathbf{r}\mathbf{r}}) = 1$ (угол равен нулю). С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} &= (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}) = \\ &= x^2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + 2xy \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \\ &+ 2xz \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + 2yz \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Но в силу взаимной ортогональности векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} их скалярные произведения равны нулю,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (2.7)$$

В итоге мы приходим к известному результату, что квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (2.8)$$

Аналогичным образом может быть доказано равенство

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad (2.9)$$

Это легко сделать, если представить каждый из векторов в виде

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (2.10)$$

и аналогично для вектора \mathbf{B} . После этого остается только их скалярно перемножить и воспользоваться равенствами (2.7).

Рассмотрим теперь движение материальной точки, траектория которой изображена на рис. 2.6, и определим такие важные для дальнейшего понятия, как скорость материальной точки \mathbf{v} и ускорение \mathbf{a} . Пусть радиус-вектор материальной точки в момент времени t_1 равен \mathbf{r}_1 , а в момент времени t_2 равен \mathbf{r}_2 . Таким образом, при движении радиус-вектор \mathbf{r} изменяется со временем, иными словами, он является функцией времени $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Если нам известен закон этого изменения, то мы знаем, где в каждый момент времени находится материальная точка, то есть мы знаем закон ее движения. Задание функции $\mathbf{r}(t)$ эквивалентно заданию трех функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — координат материальной точки, поскольку

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}. \quad (2.11)$$

Разность векторов \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_1

$$\Delta \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (2.12)$$

называется **перемещением** материальной точки. Очевидно, что это тоже вектор и он направлен из точки 1 в точку 2. Ясно, что

$$\mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 + (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \mathbf{r}_2, \quad (2.13)$$

и вы узнаете известное еще в школе правило треугольника для сложения векторов. Отношение перемещения материальной точки $\Delta \mathbf{r}_{12}$ к интервалу времени $\Delta t_{12} = t_2 - t_1$, то есть $\Delta \mathbf{r}_{12} / \Delta t_{12}$, тоже является вектором, причем коллинеарным вектору перемещения.

Очевидно, что если мы будем уменьшать величину интервала Δt_{12} (приближая t_2 к t_1), то соответственно будет уменьшаться и длина вектора $\Delta \mathbf{r}_{12}$, то есть величина перемещения. Предел отношения перемещения $\Delta \mathbf{r}_{12}$ к интервалу Δt_{12} , когда последний стремится к нулю, называют **производной** вектора $\mathbf{r}(t)$ по времени t :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t_{12} \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_{12}}{\Delta t_{12}}. \quad (2.14)$$

Этот вектор направлен по касательной к траектории материальной точки в точке t_1 . По определению, **скорость** материальной точки равна

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (2.15)$$

Это, очевидно, вектор, направленный по касательной к траектории в точке, соответствующей моменту времени t , с компонентами

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\}, \quad \text{или} \\ \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}, \quad \text{или} \\ v_x &= \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

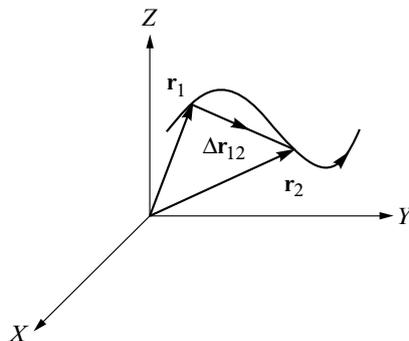


Рис. 2.6. Траектория и перемещение материальной точки.

Вектор скорости частицы $\mathbf{v}(t)$ так же, как и радиус-вектор, является функцией времени t . Аналогичным образом можно определить вектор, характеризующий скорость изменения скорости частицы и называемый **ускорением**:

$$\mathbf{a} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.17)$$

Если величина и направление этого вектора не изменяются со временем, то есть если

$$\mathbf{a} = \text{const}, \quad (2.18)$$

то такое движение называется **равноускоренным** (равнозамедленным). Для равноускоренного движения скорость материальной точки $\mathbf{v}(t)$ и ее радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ изменяются со временем по закону

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \mathbf{a}t, \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0)t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\mathbf{v}(0)$ и $\mathbf{r}(0)$ — соответственно скорость и радиус-вектор материальной точки в начальный момент времени $t = 0$ (проверка дифференцированием). Траекторией точки при равноускоренном движении является, как известно, парабола⁴. Частным случаем равноускоренного движения является движение с ускорением, равным нулю. Такое движение называется **равномерным**. Очевидно, что оно происходит по прямой.

Рассмотрим теперь вопрос, как найти **путь**⁵, проходимый материальной точкой при ее движении. Рассмотрим произвольного вида траекторию, по которой движется материальная точка. Пусть в момент времени t_1 материальная точка занимала положение на траектории, характеризуемое радиус-вектором \mathbf{r}_1 , а в момент времени t_2 — радиус-вектором \mathbf{r}_2 , см. рис. 2.8. Спрашивается, какой путь прошла материальная точка между этими двумя положениями. Перемещение материальной точки определяется вектором $\Delta\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, но длина этого вектора, очевидно, не определяет пройденный материальной точкой путь, за исключением того случая, когда траектория материальной точки между двумя положениями представляет собой прямую линию. Это подсказывает способ нахождения пути при криволинейном движении. Для этого разобьем временной интервал $t_2 - t_1$ на много одинаковых интервалов очень малой продолжительности Δt , так что в каждом таком малом интервале движение практически прямолинейное (рис. 2.9). Число таких интервалов равно

$$n = \frac{t_2 - t_1}{\Delta t}. \quad (2.20)$$

Изобразим векторы перемещения материальной точки $\Delta\mathbf{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в каждом из этих интервалов времени. Очевидно, что при достаточно малом Δt пройденный путь S может быть аппроксимирован суммой длин этих векторов:

$$S \approx \sum_{i=1}^n |\Delta\mathbf{r}_i|. \quad (2.21)$$

По мере стремления Δt к нулю это приближение становится все лучше и лучше и в конце концов при бесконечном n обращается в точное равенство.

Разделим и домножим каждое слагаемое в этой сумме на Δt :

$$S \approx \sum_{i=1}^n \frac{|\Delta\mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \quad (2.22)$$

⁴В частных случаях эта парабола может вырождаться в отрезок прямой.

⁵То есть длину траектории частицы.

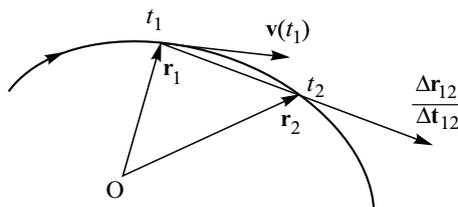


Рис. 2.7. Скорость материальной точки.

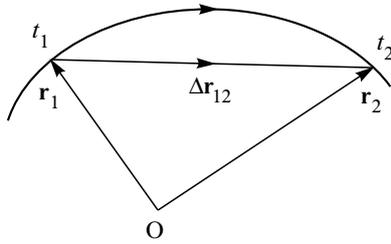


Рис. 2.8. Как найти путь?

Как мы уже сказали, точное равенство получается в пределе $\Delta t \rightarrow 0$:

$$S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{|\Delta \mathbf{r}_i|}{\Delta t} \Delta t. \quad (2.23)$$

Очевидно, можно поменять местами операции суммирования и предельного перехода (предел суммы равен сумме пределов) и вспомнить, что предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_i}{\Delta t} = \mathbf{v}_i \quad (2.24)$$

равен скорости частицы \mathbf{v} в i – том интервале. Тогда путь может быть представлен в виде суммы бесконечного числа бесконечно малых слагаемых:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} |\mathbf{v}_i| dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{v}(t)| dt. \quad (2.25)$$

Такая операция в математике называется вычислением **определенного интеграла**. Напомним, что существует еще и **неопределенный интеграл**. Так, для некоторой функции $f(t)$

$$\int f(t) dt \equiv F(t) + \text{const}, \quad (2.26)$$

где $dF/dt = f(t)$, и функция $F(t)$ называется **первообразной** по отношению к $f(t)$. Определенный интеграл в пределах от t_1 до t_2 от функции $f(t)$ вычисляется при этом по правилу:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = F(t)|_{t_1}^{t_2} \equiv F(t_2) - F(t_1). \quad (2.27)$$

Это разность значений первообразной на верхнем и нижнем пределах.

Таким образом, мы пришли к такому результату, что

путь, пройденный частицей в интервале ее движения от t_1 до t_2 , равен определенному интегралу по времени в этих пределах от модуля скорости частицы.

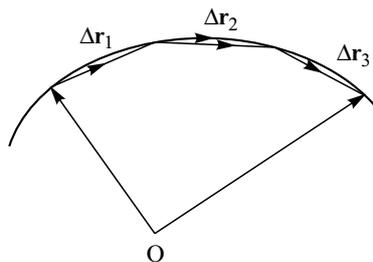


Рис. 2.9. Способ нахождения пути при криволинейном движении.

Вращательное движение. Равномерное движение точки по окружности. Вектор угловой скорости. Угловое ускорение

При равноускоренном движении частица движется все время в одной плоскости, образуемой начальным вектором скорости $\mathbf{v}(0)$ и постоянным ускорением \mathbf{a} (докажите это). Однако очевидно, что далеко не всякое плоское движение является равноускоренным. Пример плоского неравноускоренного движения, известный вам из школьного курса физики, — это **равномерное движение по окружности**. Давайте рассмотрим его здесь. Поскольку это движение плоское, выберем в качестве этой плоскости, плоскость XU . Начало координат выберем в центре окружности (рис. 3.1).

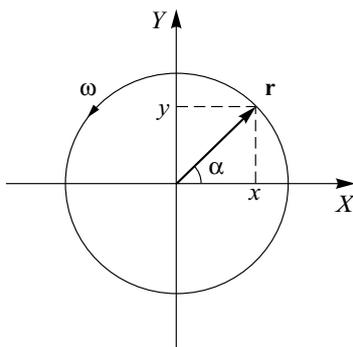


Рис. 3.1. Равномерное движение по окружности.

Координаты частицы выразим через величину радиуса окружности r и угол α :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha, \\ y &= r \sin \alpha. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку движение происходит по окружности, r от времени не зависит. Функцией времени является только угол $\alpha(t)$. Производная от угла по времени называется угловой скоростью вращения ω :

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.2)$$

При равномерном вращении по окружности $\omega = \text{const}$ и можно проинтегрировать это уравнение. В результате

$$\alpha = \omega t + \text{const}. \quad (3.3)$$

Константа интегрирования выбирается из условия $\alpha(0) = 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos \omega t, \\ y(t) &= r \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Это **полностью** определяет движение. Так, скорость материальной точки определяется производными по времени от координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \omega r \cos \omega t. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Скалярное произведение равно

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= xv_x + yv_y = r \cos \omega t (-\omega r \sin \omega t) + \\ &+ r \sin \omega t (\omega r \cos \omega t) = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

что означает перпендикулярность векторов \mathbf{r} и \mathbf{v} , то есть скорость действительно направлена по касательной к окружности. Абсолютная величина скорости равна

$$\begin{aligned} v = |\mathbf{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 \sin^2 \omega t + \omega^2 r^2 \cos^2 \omega t} = \\ &= \omega r = \text{const}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

она не зависит от времени, движение действительно равномерное (но по окружности).

Дифференцируя по времени скорость, мы можем определить ускорение:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 r \cos \omega t, \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 r \sin \omega t, \end{aligned} \quad (3.8)$$

откуда следует, что ускорение зависит от времени, то есть движение не является равноускоренным. Абсолютная величина ускорения (модуль), тем не менее, остается постоянной:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 r, \quad (3.9)$$

или, так как $\omega r = v$, то мы получаем

$$|\mathbf{a}| = \frac{v^2}{r} \quad (3.10)$$

— известную из школьного курса физики формулу для центростремительного ускорения. Почему центростремительного? Да потому, что вектор \mathbf{a} направлен к центру. В этом нетрудно убедиться, подсчитав скалярное произведение:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} &= a_x x + a_y y = -(\omega^2 r \cos \omega t) r \cos \omega t + \\ &+ (-\omega^2 r \sin \omega t) r \sin \omega t = -\omega^2 r^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{a}| |\mathbf{r}| \cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{r}}) = \omega^2 r^2 \cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{r}}). \quad (3.12)$$

Из сравнения двух этих выражений получаем, что $\cos(\widehat{\mathbf{a}\mathbf{r}}) = -1$. Таким образом, вектор ускорения антипараллелен вектору \mathbf{r} , то есть направлен к центру. В результате картина направлений векторов выглядит, как показано на рис. 3.2.

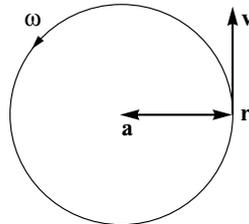


Рис. 3.2. Радиус-вектор, скорость и ускорение материальной точки при равномерном движении по окружности.

До сих пор при рассмотрении вращательного движения мы оперировали проекциями векторов на оси координат. Между тем, часто бывает полезно иметь соотношения, не зависящие от выбора системы координат, или, как говорят, записанные в **векторной форме**. Примером таких соотношений является выражение для координаты и скорости частицы при равноускоренном движении (см. лекцию 2).

При рассмотрении вращательного движения мы ввели угловую скорость вращения ω как производную по времени от угла поворота α : $\omega = d\alpha/dt$. Давайте теперь зададимся вопросом, какой величиной, скалярной или векторной, является угол поворота. Ведь когда говорят о повороте, нужно указывать не только величину угла поворота, но и то, вокруг какой оси происходит вращение (поворот) и в какую сторону (по часовой стрелке или против). В разобранный выше примере осью вращения была ось z и, поскольку мы использовали правую систему координат, вращение происходило по часовой стрелке (если смотреть в положительном направлении вдоль оси z) (рис. 3.3). С этой точки зрения угол поворота должен быть величиной векторной. Однако, как мы убедимся на следующей лекции, произвольный угол поворота вектором, вообще говоря, не является. Понятие вектора применимо лишь по отношению к бесконечно малым углам поворота.

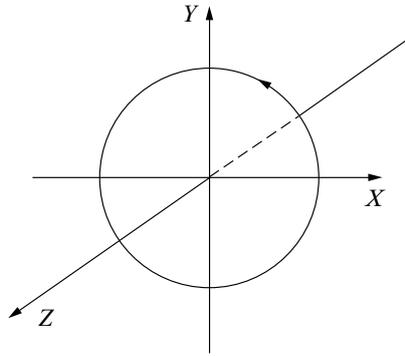


Рис. 3.3. Направление вращения.

Поэтому, говоря о повороте на какой-то малый угол $\Delta\alpha$, можно приближенно говорить о векторе $\Delta\alpha$, величина которого равна углу поворота, а направление показывает направление оси вращения так, чтобы поворот происходил по часовой стрелке, или в соответствии с правилом буравчика. В нашем конкретном случае вектор $\Delta\alpha$ коллинеарен с направлением оси z . Зададимся вопросом, как связано перемещение материальной точки Δr при повороте ее радиус-вектора r на малый угол $\Delta\alpha$ (рис. 3.4).

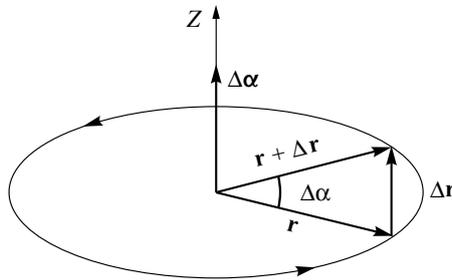


Рис. 3.4. Связь вектора перемещения с углом поворота.

На этот вопрос легко ответить, если речь идет о бесконечно малых поворотах $d\alpha$. Тогда бесконечно малым является и перемещение dr . Его величина (равная длине хорды) совпадает теперь с длиной дуги, то есть

$$|dr| = r d\alpha, \quad (3.13)$$

а по направлению вектор dr совпадает с касательной, то есть перпендикулярен r . В результате мы имеем три взаимно перпендикулярных вектора r , dr и $d\alpha$, образующие правую тройку (рис. 3.5), причем $|dr| = |d\alpha| |r|$. Те, кто помнят из школьного курса о **векторном произведении** векторов, без

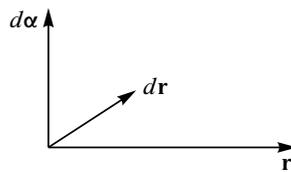


Рис. 3.5. Взаимная ориентация трех векторов.

труда сообразят, что искомое соотношение можно записать в виде векторного равенства

$$dr = [d\alpha \times r]. \quad (3.14)$$

Действительно, по определению, векторным произведением двух векторов $[A \times B]$ называется вектор

$$C = [A \times B], \quad (3.15)$$

который направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат (или которую образуют) два вектора A и B , в сторону от этой плоскости, соответствующую правилу буравчика (см. рис. 3.6). Величина же вектора C равна произведению модулей векторов на синус угла между ними:

$$|C| = |A| |B| \sin(\widehat{AB}). \quad (3.16)$$

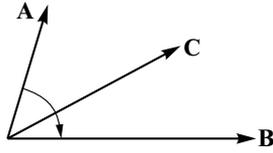


Рис. 3.6. Ориентация трех векторов в векторном произведении.

В нашем случае угол между векторами $d\alpha$ и \mathbf{r} равен 90° , так что синус равен единице. А поскольку, как мы уже писали, $|d\mathbf{r}| = r d\alpha$, то мы убеждаемся в справедливости векторного соотношения $d\mathbf{r} = [d\alpha \times \mathbf{r}]$.

Разделив обе стороны этого равенства на бесконечно малый временной интервал dt , в течение которого произошло изменение вектора \mathbf{r} на $d\mathbf{r}$, мы получим

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left[\frac{d\alpha}{dt} \times \mathbf{r} \right]. \quad (3.17)$$

Но величина, стоящая в левой части равенства, есть не что иное, как скорость частицы \mathbf{v} , а производная

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \quad (3.18)$$

называется **вектором угловой скорости**. Ее мы вначале ввели по абсолютной величине, а теперь показали, что имеет смысл говорить об угловой скорости вращения как о векторе. Ее величина определяет величину угловой скорости (скорость вращения, или скорость изменения угла), а направление параллельно оси вращения, причем так, что имеет место правило буравчика. Итак, мы получили, что

$$\mathbf{v} = [\omega \times \mathbf{r}]. \quad (3.19)$$

Ориентация этих трех векторов показана на рис. 3.7.

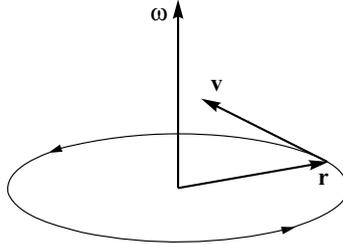


Рис. 3.7. Ориентация радиус-вектора, вектора скорости и угловой скорости.

Чтобы получить ускорение \mathbf{a} , надо от обеих частей взять производную по времени. Если ω постоянно (как по величине, так и по направлению)¹, то

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\omega \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = [\omega \times \mathbf{v}], \quad (3.20)$$

то есть ускорение оказывается перпендикулярным угловой скорости вращения ω и скорости движения \mathbf{v} . А поскольку последняя направлена по касательной, то, значит, ускорение направлено либо параллельно \mathbf{r} , либо антипараллельно. Как именно, можно выяснить, подставив в вышеприведенную формулу значение \mathbf{v} :²

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [\omega \times \mathbf{v}] = [\omega \times [\omega \times \mathbf{r}]] = \\ &= \omega(\omega \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\omega \cdot \omega) = \omega(\omega \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Поскольку в рассматриваемом нами примере начало координат выбрано в центре окружности, то угловая скорость ω и радиус-вектор \mathbf{r} перпендикулярны друг другу а, следовательно, их скалярное произведение равно нулю (вообще говоря, как мы сейчас увидим, далеко не всегда $\omega \perp \mathbf{r}$) и мы получаем

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r}, \quad (3.22)$$

¹Равномерное вращение.

²Здесь мы воспользовались формулой для двойного векторного произведения $[\mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

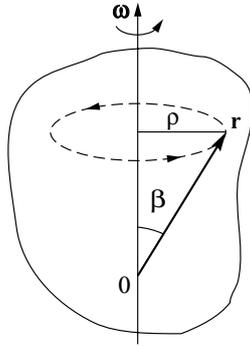


Рис. 3.8. Вращение твердого тела.

то есть антипараллельность векторов \mathbf{a} и \mathbf{r} (вспомните термин “центростремительное ускорение”). По величине они таковы: $|\mathbf{a}| = \omega^2 |\mathbf{r}|$, то есть имеем уже знакомый результат.

Вы можете спросить, зачем нам понадобилось иметь дело с векторным и с двойным векторным произведением, если мы уже разобрали движение по окружности, дифференцируя по времени проекции материальной точки на оси координат (причем получили результаты, известные со школьной скамьи). Стоит ли игра свеч? Да, стоит, во-первых, потому, что мы записали законы движения в **инвариантной**, как говорят, форме, не зависящей от выбора конкретной системы координат. Во-вторых, записанные нами соотношения справедливы и в более общем случае, когда мы рассматриваем вращение системы материальных точек или твердого тела как целого (рис. 3.8).

Имея в виду эту картину, нетрудно показать, что здесь, хотя $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r} не перпендикулярны друг другу, тем не менее, выполняется прежнее соотношение для скорости движения некоторой выбранной нами точки с радиус-вектором \mathbf{r} :

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]. \quad (3.23)$$

Действительно, как следует из рис. 3.8, точка движется по окружности радиуса $\rho = r \sin \beta$ со скоростью $v = \omega \rho = \omega r \sin \beta$. Но поскольку β — это угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{r} , мы убеждаемся в справедливости этой формулы.

Теперь нам понятно происхождение дополнительного слагаемого в центростремительном ускорении (см. рис. 3.9):

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r}. \quad (3.24)$$

Таким образом, ускорение \mathbf{a} на самом деле направлено не к центру, а к оси вращения, поэтому его

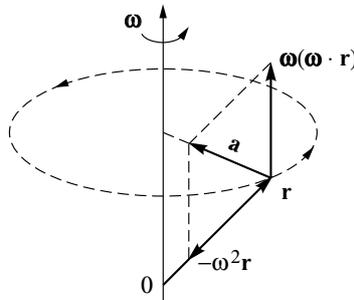


Рис. 3.9. Центростремительное ускорение.

можно было бы называть **осеостремительным**. Но, разумеется, дело не в названиях.

В пользу соотношения $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$ говорит и то, что оно справедливо в более общем случае, когда вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ не является постоянным и зависит от времени: $\boldsymbol{\omega}(t)$. Тогда формула для ускорения изменится — в ней появится дополнительное слагаемое:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right] + \left[\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = \\ &= [\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Величина $\boldsymbol{\beta} = d\boldsymbol{\omega}/dt$ называется **угловым ускорением**. Оно появляется, если меняется по величине угловая скорость (замедляется, например, вращение вокруг фиксированной оси) либо поворачивается с течением времени сама ось вращения (либо и то и другое).

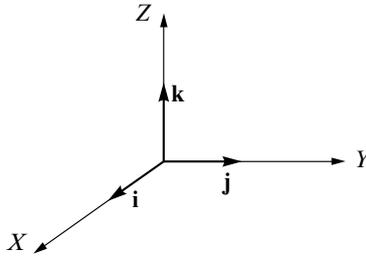


Рис. 3.10. Взаимное расположение единичных ортов.

В заключение для справок приведем выражение для декартовых компонент векторного произведения $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]$:

$$\begin{aligned} C_x &= [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_x = A_y B_z - A_z B_y, & \{xyz\}, \\ C_y &= [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_y = A_z B_x - A_x B_z, & \{yzx\}, \\ C_z &= [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]_z = A_x B_y - A_y B_x, & \{zxy\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Здесь для запоминания следует использовать указанные выше циклические перестановки. Эти соотношения легко доказываются, если записать каждый вектор в виде

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (3.27)$$

и, аналогично, вектор \mathbf{B} . Затем следует учесть, что векторные произведения единичных ортов \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} между собой равны соответственно (см. рис. 3.10)

$$[\mathbf{i} \times \mathbf{j}] = \mathbf{k}, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{i}] = \mathbf{j}, \quad [\mathbf{j} \times \mathbf{k}] = \mathbf{i} \quad (3.28)$$

и что при изменении порядка сомножителей изменяется знак векторного произведения:

$$[\mathbf{j} \times \mathbf{i}] = -[\mathbf{i} \times \mathbf{j}] \text{ и т. д.} \quad (3.29)$$

Далее нужно произвести векторное умножение

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = [(A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})], \quad (3.30)$$

воспользовавшись приведенными выше правилами.

Векторы. Преобразование векторов. Матрица направляющих косинусов. Полярные и аксиальные векторы. Условие инвариантности физических законов по отношению к преобразованию координатных систем

Понятие вектора и основные операции векторной алгебры мы считаем известными из курса физики средней школы. Так, вектор — это физическая величина, определяемая величиной и направлением, которые не зависят от выбора системы координат. Он отличается от скаляра, который характеризуется только величиной (не зависящей от системы координат). К скалярным величинам относятся масса, энергия, температура, электрический заряд, путь, пройденный частицей, и т. д. Примерами векторов являются скорость, ускорение, сила, напряженность электрического и магнитного полей. В качестве дополнения к приведенному определению следует указать, что не всякие направленные величины являются векторами, а только такие, которые складываются **геометрически**, то есть по правилу параллелограмма.

Пример. Как мы видели, угол поворота тела вокруг какой-то оси можно, казалось бы, рассматривать как вектор в том смысле, что он имеет численное значение, равное углу поворота, и направление, совпадающее с направлением оси вращения, которое определяется по правилу буравчика. Однако два таких поворота не складываются по закону сложения векторов, если только углы поворота не являются бесконечно малыми.

В качестве примера рассмотрим два последовательных поворота на угол π вокруг двух осей, пересекающихся под углом φ (Oa и Ob) (рис. 4.1). При первом повороте на угол π вокруг оси Oa

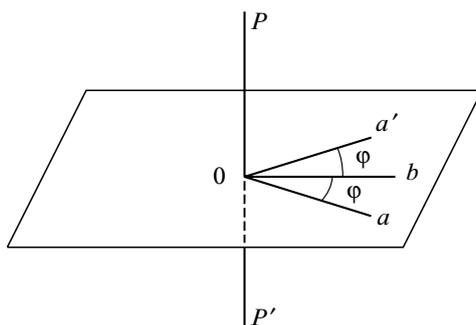


Рис. 4.1. Произведение двух поворотов.

точка P переходит в P' , а $P' — в P$. При этом ось Oa остается на месте. При втором повороте на угол π вокруг оси Ob $P' \rightarrow P$ и $P \rightarrow P'$, то есть точки P и P' возвращаются на свои места.

Таким образом, после двух поворотов линия PP' (перпендикулярная плоскости aOb) остается неподвижной и, следовательно, является осью результирующего поворота. Для определения угла этого поворота замечаем, что в результате первого поворота ось Oa остается на месте, а после второго — переходит в позицию Oa' , образующую с Oa угол 2φ . Таким образом, два последовательных поворота вокруг осей Oa и Ob представляют собой поворот вокруг оси PP' (на угол 2φ), перпендикулярной плоскости ab . Если считать каждый поворот вектором, направленным вдоль Oa и Ob соответственно, то “сумма” этих векторов должна лежать в плоскости ab , в то время как вектор результирующего поворота перпендикулярен этой плоскости. В результате правило “сложения” этих двух векторов (поворотов) не соответствует правилу параллелограмма. Более того, заметим, что при изменении порядка поворотов (сначала вокруг оси Ob , а затем вокруг оси Oa) получается поворот в противоположном направлении, то есть результат этого “сложения” некоммутативен, он зависит от порядка, в каком производятся эти повороты¹.

Правило сложения векторов подчиняются только повороты на бесконечно малый угол, поэтому, например, угловые скорости ω_1 и ω_2 можно складывать, в результате чего будем иметь вращение с

¹На самом деле правильно говорить не о сумме, а о произведении поворотов, так как матрицы направляющих косинусов двух последовательных поворотов перемножаются.

угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

Как мы уже знаем, для задания вектора в трехмерном пространстве достаточно задать три числа — его проекции, например на оси декартовой системы координат:

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{n}_1 + x_2 \mathbf{n}_2 + x_3 \mathbf{n}_3 = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{n}_i \equiv x_i \mathbf{n}_i, \quad (4.1)$$

где x_1, x_2, x_3 — проекции, а $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ — единичные векторы (орты), направленные вдоль трех взаимно перпендикулярных осей. Последний знак тождественного равенства отражает так называемое **правило суммирования Эйнштейна** — по дважды повторяющимся индексам (i в данном случае) подразумевается суммирование². Если мы повернем координатную систему, то в новой системе координат проекции того же самого вектора \mathbf{r} на оси новой системы будут уже другими, другими будут и единичные орты $\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3$ (рис. 4.2).

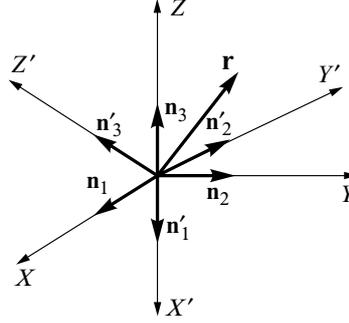


Рис. 4.2. Старая и новая (повернутая) системы координат.

Вектор \mathbf{r} можно записать и в новой системе координат как

$$\mathbf{r} = x'_1 \mathbf{n}'_1 + x'_2 \mathbf{n}'_2 + x'_3 \mathbf{n}'_3 = \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{n}'_i \equiv x'_i \mathbf{n}'_i. \quad (4.2)$$

Оба выражения представляют собой один и тот же вектор, поэтому они равны:

$$x_1 \mathbf{n}_1 + x_2 \mathbf{n}_2 + x_3 \mathbf{n}_3 = x'_1 \mathbf{n}'_1 + x'_2 \mathbf{n}'_2 + x'_3 \mathbf{n}'_3. \quad (4.3)$$

Домножим скалярно это равенство последовательно на $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ и \mathbf{n}_3 и воспользуемся взаимной ортогональностью векторов $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ и \mathbf{n}_3 :

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_1) + x'_2 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_2) + x'_3 (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_3), \\ x_2 &= x'_1 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_1) + x'_2 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_2) + x'_3 (\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}'_3), \\ x_3 &= x'_1 (\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}'_1) + x'_2 (\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}'_2) + x'_3 (\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}'_3). \end{aligned} \quad (4.4)$$

В результате мы получили соотношение, выражающее старые проекции через новые. Можно было бы выразить новые проекции через старые. Для этого надо вышеупомянутое равенство \mathbf{r} в двух системах координат (4.3) домножить скалярно на $\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2$ и \mathbf{n}'_3 . Например, таким образом получаем

$$x'_1 = x_1 (\mathbf{n}'_1 \mathbf{n}_1) + x_2 (\mathbf{n}'_1 \mathbf{n}_2) + x_3 (\mathbf{n}'_1 \mathbf{n}_3) \quad (4.5)$$

и аналогично два других равенства.

Коэффициенты

$$\alpha_{ik} = \mathbf{n}_i \mathbf{n}'_k = \cos(\widehat{ik'}), \quad (4.6)$$

характеризующие ориентацию новой системы координат относительно старой, называются направляющими косинусами. Используя их, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 \alpha_{11} + x'_2 \alpha_{12} + x'_3 \alpha_{13}, \\ x_2 &= x'_1 \alpha_{21} + x'_2 \alpha_{22} + x'_3 \alpha_{23}, \\ x_3 &= x'_1 \alpha_{31} + x'_2 \alpha_{32} + x'_3 \alpha_{33}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

²Индекс i называется **немым** индексом. Его можно обозначать любой буквой.

Если использовать правило суммирования Эйнштейна, то эти три равенства можно записать компактно в виде одного равенства

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k. \quad (4.8)$$

Здесь i — это так называемый **свободный индекс**, который пробегает три значения, $i = 1, 2, 3$. По немому индексу k производится суммирование от 1 до 3. Обратное преобразование столь же компактно запишется в виде

$$x'_i = \alpha_{ki} x_k. \quad (4.9)$$

Вектором \mathbf{A} мы будем называть физическую величину, характеризуемую тройкой чисел A_1, A_2, A_3 , которые при повороте координатной системы преобразуются по закону (4.8):

$$A_i = \alpha_{ik} A'_k, \quad (4.10)$$

то есть так же, как координаты x_1, x_2, x_3 .

А поворот системы координат характеризуется **матрицей направляющих косинусов** (или просто **матрицей поворота**)

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Выясним свойства элементов этой матрицы. Для этого выразим старые орты через новые:

$$\mathbf{n}_1 = \alpha_{11} \mathbf{n}'_1 + \alpha_{12} \mathbf{n}'_2 + \alpha_{13} \mathbf{n}'_3 = \sum_{i=1}^3 \alpha_{1i} \mathbf{n}'_i = \alpha_{1i} \mathbf{n}'_i. \quad (4.12)$$

Умножим это равенство скалярно на \mathbf{n}_1 :

$$1 = \alpha_{11} \underbrace{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_1)}_{\alpha_{11}} + \alpha_{12} \underbrace{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_2)}_{\alpha_{12}} + \alpha_{13} \underbrace{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}'_3)}_{\alpha_{13}}. \quad (4.13)$$

Иными словами,

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1, \quad (4.14)$$

то есть сумма квадратов направляющих косинусов первой строки матрицы $\hat{\alpha}$ равна единице. Аналогичным образом записав

$$\mathbf{n}_2 = \alpha_{21} \mathbf{n}'_1 + \alpha_{22} \mathbf{n}'_2 + \alpha_{23} \mathbf{n}'_3, \quad (4.15)$$

можно после скалярного умножения этого равенства на \mathbf{n}_2 получить

$$\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 = 1 \quad (4.16)$$

и таким же образом —

$$\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1, \quad (4.17)$$

то есть сумма квадратов элементов **каждой** строки матрицы $\hat{\alpha}$ равна единице. Точно так же можно доказать, что сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы $\hat{\alpha}$ равна единице. Например,

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 + \alpha_{31}^2 = 1. \quad (4.18)$$

Теперь возьмем равенство

$$\mathbf{n}_1 = \alpha_{11} \mathbf{n}'_1 + \alpha_{12} \mathbf{n}'_2 + \alpha_{13} \mathbf{n}'_3 \quad (4.19)$$

и умножим его скалярно на вектор \mathbf{n}_2 , ортогональный вектору \mathbf{n}_1 :

$$0 = \alpha_{11} (\mathbf{n}'_1 \cdot \mathbf{n}_2) + \alpha_{12} (\mathbf{n}'_2 \cdot \mathbf{n}_2) + \alpha_{13} (\mathbf{n}'_3 \cdot \mathbf{n}_2), \quad (4.20)$$

или

$$0 = \alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} + \alpha_{13} \alpha_{23}. \quad (4.21)$$

Таким образом, попарное произведение элементов первой строки матрицы поворота на вторую и последующее суммирование дают нуль. Точно так же можно показать, что нуль дадут любые два

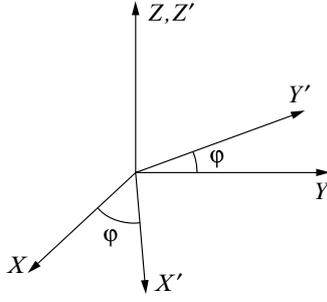


Рис. 4.3. Поворот системы координат на угол φ вокруг оси z .

парные произведения разных строк друг на друга. Об этом свойстве говорят как о взаимной **ортогональности строк** матрицы $\hat{\alpha}$. Аналогичным образом можно доказать **ортогональность столбцов** матрицы $\hat{\alpha}$. Все эти свойства, используя правило суммирования Эйнштейна, можно коротко записать в виде

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}. \quad (4.22)$$

Первое равенство выражает собой ортогональность и нормировку строк, а второе, соответственно, столбцов. Свободные индексы i и j — два произвольных индекса из набора 1, 2, 3, а по дважды повторяющимся (немым) индексам (k) в формуле (4.22) подразумевается суммирование. Символ δ_{ij} , определяемый равенством

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (4.23)$$

— это так называемый **символ Кронекера**. Символ Кронекера также можно записать в виде матрицы

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

У нее на диагонали стоят единицы, а все остальные (недиагональные) элементы равны нулю. Очевидно, что так же выглядит матрица **тождественного преобразования**, когда новая координатная система совпадает со старой.

Пользуясь свойствами матрицы $\hat{\alpha}$, легко доказать, что скалярное произведение двух векторов не зависит от выбора системы координат:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \equiv A_iB_i. \quad (4.25)$$

Старые и новые проекции связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A_i &= \alpha_{ik}A'_k, \\ B_i &= \alpha_{ij}B'_j. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Умножим их друг на друга и воспользуемся ортогональностью столбцов матрицы $\hat{\alpha}$:

$$A_iB_i = \alpha_{ik}\alpha_{ij}A'_kB'_j = \delta_{kj}A'_kB'_j = A'_jB'_j. \quad (4.27)$$

В результате мы получили, что $A_iB_i = A'_jB'_j$, то есть скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ инвариантно относительно поворота системы координат.

Найдем вид матрицы $\hat{\alpha}$ для одного частного случая, когда система координат поворачивается на угол φ вокруг оси z . Поскольку $\alpha_{ik} = \cos(\widehat{ik'})$, то, глядя на рис. 4.3, легко находим

$$\hat{\alpha}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

До сих пор речь шла о поворотах систем координат. Однако, как известно, существует две системы координат, правая и левая. Очевидно, что при поворотах правая система координат всегда остается правой, а левая — левой. Но существуют такие преобразования координат, которые правую систему преобразуют в левую и наоборот. Например, это может быть инверсия одной из осей, $y \rightarrow -y$ (рис. 4.4).

Очевидно, что при этом между проекциями одного и того же радиус-вектора \mathbf{r} в новой и старой координатных системах имеются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= -y', \\ z &= z', \end{aligned} \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Поскольку $\cos(\widehat{yy'}) = -1$, то координаты радиус-вектора при инверсии одной из осей преобразуются по тем же правилам, что и при поворотах системы координат. Но это оказывается справедливым не для всех векторов.

Рассмотрим, например, вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, описывающий вращение в положительном направлении вокруг оси z (рис. 4.5). Изменим теперь знак одной из осей, например оси y . Это можно себе представить как отражение системы координат в зеркале, плоскость которого перпендикулярна этой оси (рис. 4.6).

Однако очевидно, что при отражении в зеркале изменяется и направление вращения. Из вращения по часовой стрелке оно превратилось во вращение против часовой стрелки, то есть изменился знак проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на ось z ,

$$\omega_z = -\omega'_z, \quad (4.30)$$

в то время как координата z обычного радиус-вектора осталась бы прежней,

$$z = z'. \quad (4.31)$$

Это означает, что радиус-вектор точки \mathbf{r} и угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ преобразуются по-разному, если поменять правую систему координат на левую.

В связи с этим радиус-вектор \mathbf{r} называют **полярным вектором**, а вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ — **аксиальным вектором**. При поворотах системы координат оба вектора преобразуются одинаковым образом:

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{ik}x'_k, \\ \omega_i &= \alpha_{ik}\omega'_k. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Но если матрица $\hat{\alpha}$ переводит правую систему координат в левую (и наоборот), то законы преобразования этих векторов не совпадают:

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_{ik}x'_k, \\ \omega_i &= -\alpha_{ik}\omega'_k, \end{aligned} \quad (4.33)$$

отличаясь знаком.

Примерами полярных векторов в физике являются радиус-вектор, скорость, ускорение, сила:

$$\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (4.34)$$

Примеры аксиальных векторов: угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$, напряженность магнитного поля \mathbf{H} , момент импульса \mathbf{M} .

При инверсии системы координат (то есть при изменении знака всех осей) правая система переходит в левую и полярные векторы меняют свой знак:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow -\mathbf{r}, \\ \mathbf{v} &\rightarrow -\mathbf{v}, \\ \mathbf{a} &\rightarrow -\mathbf{a}, \\ \mathbf{F} &\rightarrow -\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

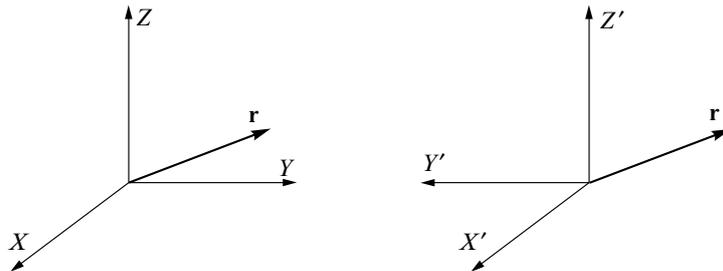


Рис. 4.4. Преобразование компонент вектора при инверсии одной из осей.

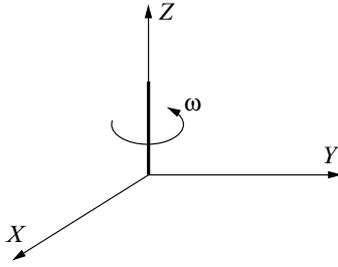


Рис. 4.5. Вектор угловой скорости.

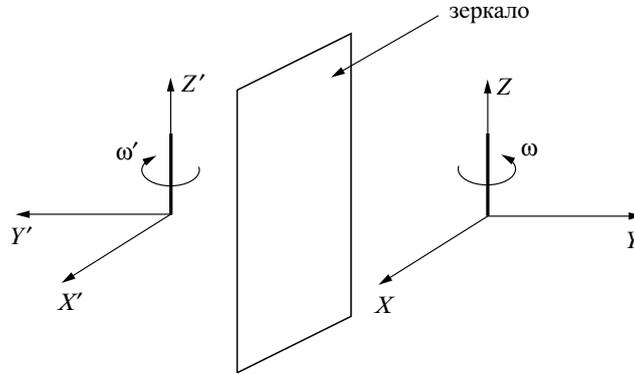


Рис. 4.6. При таком зеркальном отражении направление вращения меняется на противоположное!

а аксиальные векторы при этом не изменяются (потому что их закон преобразования отличается знаком минус):

$$\begin{aligned} \omega &\rightarrow \omega, \\ \mathbf{H} &\rightarrow \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

В физике все физические законы должны выражаться в инвариантной форме, то есть не должны зависеть от выбора системы координат. Это, в частности, означает, что невозможно, например, равенство аксиального и полярного векторов, потому что оно будет выглядеть по-разному в левой и правой системах координат. Например, если некий закон в правой системе выглядит как

$$\text{акс} = \text{пол}, \quad (4.37)$$

то в левой системе — как

$$\text{акс} = -\text{пол}. \quad (4.38)$$

Таким образом, физический закон выглядит по-разному в левой и правой системах координат, в природе же такого различия не существует. Левая система ничем не хуже правой. По той же причине нельзя складывать (вычитать) аксиальный и полярный векторы, так же как нельзя складывать величины разной размерности, например секунды и граммы.

Поэтому всегда при записи какого-либо векторного равенства необходимо проверять, не изменится ли оно при переходе от правой системы координат к левой. Поскольку правая система координат переходит в левую при инверсии, а закон преобразования векторов при инверсии выглядит особенно просто,

$$\begin{aligned} \text{пол} &\rightarrow -\text{пол} \quad (), \\ \text{акс} &\rightarrow \text{акс} \quad (), \end{aligned} \quad (4.39)$$

то нужно к обеим частям равенства применить инверсию.

Например, исследуем таким образом равенство

$$\mathbf{v} = [\omega \times \mathbf{r}] \quad (4.40)$$

для скорости движения материальной точки, радиус-вектор которой \mathbf{r} вращается с угловой скоростью ω . Поскольку \mathbf{v} — полярный вектор (производная от полярного вектора \mathbf{r} по времени), то при инверсии левая часть равенства меняет знак. Чтобы равенство осталось инвариантным по отношению к инверсии, необходимо, чтобы и правая часть $[\omega \times \mathbf{r}]$ изменила знак при инверсии. Угловая скорость при инверсии не изменяет свой знак (это аксиальный вектор), а радиус-вектор \mathbf{r} — изменяет (это полярный вектор). Поэтому

$$[\omega \times \mathbf{r}] \rightarrow [(\omega) \times (-\mathbf{r})] = -[\omega \times \mathbf{r}], \quad (4.41)$$

то есть и правая часть нашего равенства изменила знак при инверсии, а следовательно, это тоже полярный вектор. Таким образом, после инверсии системы координат равенство осталось прежним,

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}], \quad (4.42)$$

и мы, следовательно, имеем равенство двух полярных векторов.

Из этого рассуждения можно легко прийти к выводу, что векторное произведение двух полярных векторов есть вектор аксиальный,

$$[\text{пол}_1 \times \text{пол}_2] = \text{акс}, \quad (4.43)$$

поскольку при инверсии левая часть знака не изменяет:

$$[(-\text{пол}_1) \times (-\text{пол}_2)] = [\text{пол}_1 \times \text{пол}_2]. \quad (4.44)$$

Векторное произведение двух аксиальных векторов также является аксиальным вектором.

А что будет, если скалярно перемножить между собой полярный и аксиальный векторы?

$$\text{пол} \cdot \text{акс} = . \quad (4.45)$$

Полученная величина, очевидно, инвариантна к любым пространственным поворотам системы координат, то есть можно сказать, что она является скалярной. Однако это не совсем обычный скаляр, так как он изменяет знак при инверсии системы координат. Такую величину называют **псевдоскаляром**. Например, если бы существовал элементарный магнитный заряд, то он был бы псевдоскалярной величиной. Таким образом, скалярные величины бывают двух типов: **истинный скаляр**, инвариантный к любым преобразованиям системы координат (не только к вращениям, но и к инверсии), и **псевдоскаляр**, инвариантный к вращениям и меняющий знак, когда правая система переходит в левую (и наоборот).

Литература

- [1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1979 — 520 с.
- [2] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклевский курс физики, том 1, Механика. М., Наука, 1975 — 480 с.
- [3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике (1–2 тома). М., Мир, 1976 — 440 с.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах, том 1, Механика. М., Наука, 1973 — 208 с.
- [5] Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М., Наука, 1988 — 416 с.

Оглавление

Лекция 1.

Введение.

Макромир и микромир.

Их взаимосвязь.

Современная картина мира

2

Лекция 2.

Границы применимости классической механики.

Кинематика.

Пространственно-временные системы отсчета.

Основы векторной алгебры.

Перемещение, скорость и ускорение материальной точки.

Равноускоренное движение.

Путь

7

Лекция 3.

Вращательное движение.

Равномерное движение точки по окружности.

Вектор угловой скорости.

Угловое ускорение

13

Лекция 4.

Векторы.

Преобразование векторов.

Матрица направляющих косинусов.

Полярные и аксиальные векторы.

Условие инвариантности физических законов по отношению к преобразованию координатных систем

19

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. Ф. ИОФФЕ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Г. Г. Зегря, Д. А. Паршин

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

(конспект лекций по общему курсу физики)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета. Движение относительно инерциальных систем отсчета. Законы Ньютона. Принцип относительности Галилея. Преобразование Галилея

Из школьного курса физики вам известны три закона Ньютона. Напомним их содержание.

Первый закон Ньютона. Тело остается в состоянии покоя или движется с постоянной скоростью (без ускорения), если оно предоставлено самому себе, то есть если на него не действуют никакие внешние силы. Это означает, что

$$\mathbf{a} = 0, \quad \text{когда } \mathbf{F} = 0. \quad (5.1)$$

Второй закон Ньютона. Результирующая сила, действующая на тело, равна произведению массы этого тела на его ускорение:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (5.2)$$

Третий закон Ньютона. При взаимодействии двух тел сила \mathbf{F}_{21} , действующая на второе тело со стороны первого, равна по величине и противоположна по направлению силе \mathbf{F}_{12} , действующей на первое тело со стороны второго:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \quad (5.3)$$

причем оба вектора направлены по линии, соединяющей эти тела.

Имеются определенные пределы применимости третьего закона. Мы знаем, что все сигналы, а значит и силы, передаются не мгновенно, а с конечной скоростью. Однако третий закон содержит утверждение, что $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, когда обе эти силы измеряются в один и тот же момент времени. Это требование противоречит тому факту, что данное тело воспринимает действие силы, оказываемое другим телом, не мгновенно, а через конечный промежуток времени.

Поэтому третий закон Ньютона не всегда является достаточно хорошим приближением при рассмотрении столкновения атомов и заряженных частиц. Рассмотрим, например, два положительных точечных заряда q_1 и q_2 , скорости которых \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 перпендикулярны, так что их пути пересекаются, но заряды не сталкиваются, так как один из них успевает проскочить перед другим. Пусть в некий момент их относительное положение будет таким, как изображено на рис. 5.1. Каждый из зарядов создает вокруг себя электрическое и магнитное поля. Если скорость заряда много меньше скорости света, то эти поля определяются формулами

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{H} = \frac{q}{c} \frac{[\mathbf{v} \times \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (5.4)$$

где радиус вектор \mathbf{r} проведен из заряда в точку наблюдения поля. Поскольку, как следует из этой формулы, движущийся заряд q_1 не создает магнитного поля в направлении своего движения, то на заряд q_2 со стороны заряда q_1 будет действовать только электрическая сила по линии, соединяющей оба заряда. Однако на заряд q_1 со стороны заряда q_2 , помимо электрической силы, будет действовать еще и сила со стороны магнитного поля, создаваемого зарядом q_2 . Поскольку электрические силы, действующие на заряды, равны по величине и противоположны по направлению, то наличие магнитной силы, действующей на заряд q_1 , приведет к нарушению третьего закона Ньютона. Нарушение, однако, будет небольшим, в меру малости отношения $v_1 v_2 / c^2 \ll 1$.

Для столкновения же автомобилей третий закон Ньютона будет очень хорошим приближением, потому что продолжительность такого столкновения велика по сравнению с промежутком времени, необходимым для того, чтобы световой сигнал прошел вдоль длины помятого автомобиля. (Кстати, почему световой, а не звуковой, ведь волна деформации распространяется со скоростью звука?)

$$\frac{L}{c} \approx \frac{300 \text{ см}}{3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек}} \approx 10^{-8} \text{ сек}, \quad (5.5)$$

L — длина автомобиля (за 10^{-8} сек автомобиль, движущийся со скоростью 100 км/час, то есть около $3 \cdot 10^3$ см/сек, проходит примерно $3 \cdot 10^{-5}$ см).

Первые два закона движения выполняются только тогда, когда наблюдение ведется в системах отсчета, движущихся без ускорения. Такие системы отсчета называются **инерциальными**. Например,

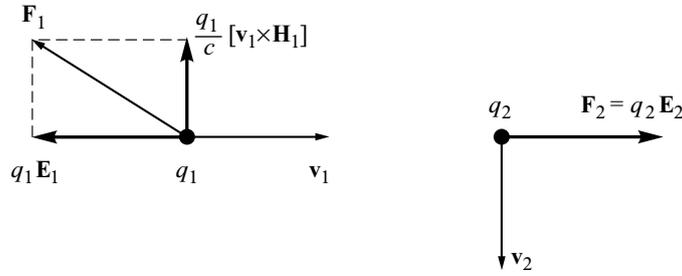


Рис. 5.1. Силы взаимодействия между двумя движущимися зарядами не всегда равны и противоположны.

если тело в одной системе отсчета движется с постоянной скоростью и имеется система отсчета, которая движется с ускорением относительно нее, то очевидно, что тело будет двигаться относительно этой системы отсчета с ускорением.

Например, если система отсчета жестко связана с вращающейся каруселью, то в такой системе отсчета ускорение тела не равно нулю, когда на это тело не действуют силы. Вы можете неподвижно стоять на карусели, только если будете от чего-либо отталкиваться, сообщая вашему телу силу $m\omega^2 r$ по направлению к оси, где m — масса вашего тела, ω — угловая скорость вращения, а r — расстояние от вас до оси вращения. Другим примером может служить система отсчета, неподвижно связанная с самолетом, который быстро набирает скорость при взлете. Благодаря ускорению, вас прижимает назад, к сидению, а сила, действующая со стороны спинки сидения, удерживает вас в состоянии покоя относительно этой системы.

Если бы вы находились в состоянии равномерного движения или покоя относительно системы отсчета, не имеющей ускорения, то для этого не требовалось бы никакой силы. Но если вы хотите находиться в состоянии покоя относительно системы отсчета, движущейся с ускорением, то вы должны прилагать силу или испытывать действие силы со стороны другого тела. Вам нужна веревка, чтобы удержаться, или сидение, чтобы прижаться к нему. Движение (его характер) в системах отсчета, движущихся с ускорением, играет важную роль в физике. Такие системы отсчета называются **неинерциальными**. Особенно важно понять характер движения тел во вращающейся системе отсчета (практическое применение — центрифуга), хотя бы потому, что мы с вами находимся как раз в такой системе отсчета (на Земле), но этого мы пока делать не будем и попытаемся ответить на вопрос, с какой точностью ту или иную систему отсчета можно считать инерциальной.

Ясно, что наша Земля не является инерциальной системой отсчета (является неинерциальной), поскольку она, например, вращается вокруг собственной оси. Из-за этого точка на экваторе имеет центростремительное ускорение

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \simeq 3,4 \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}, \quad (5.6)$$

где угловая скорость вращения Земли ω и радиус Земли R равны

$$\omega = \frac{2\pi}{\underbrace{8,6 \cdot 10^4 \text{ сек}}_{\text{сутки}}} \approx 0,73 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}, \quad R \simeq 6,4 \cdot 10^8 \text{ см}. \quad (5.7)$$

В результате центростремительное ускорение получается равным примерно $3,4 \text{ см/сек}^2$. Это составляет около 0,3% от ускорения свободного падения $g \approx 980 \text{ см/сек}^2$, что, вообще говоря, с точки зрения прецизионных физических измерений, является огромной величиной, которую необходимо учитывать при расчетах. Из-за этого, например, наблюдаемое на Северном полюсе ускорение силы тяжести превышает ускорение силы тяжести, наблюдаемое на экваторе (там бананы весят меньше, вот, наверное, почему их везут продавать на север).

Вторая причина, по которой Земля не является инерциальной системой, — это ее движение по орбите вокруг Солнца. Так, соответствующая угловая скорость равна

$$\omega = \frac{2\pi}{\underbrace{3 \cdot 10^7 \text{ сек}}_{\text{год}}} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ сек}^{-1}. \quad (5.8)$$

При радиусе орбиты Земли $R = 150 \cdot 10^6 = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$ получим $a = \omega^2 R \approx 0,6 \text{ см/сек}^2$, что примерно на порядок меньше ускорения, развиваемого за счет вращения Земли вокруг своей оси.

Наконец, само Солнце вращается со всеми своими планетами вокруг центра нашей Галактики со скоростью порядка 300 км/сек . Эта скорость была измерена при исследовании доплеровского сдвига спектральных линий света, испускаемого звездами. Расстояние до центра нашей Галактики, R ,

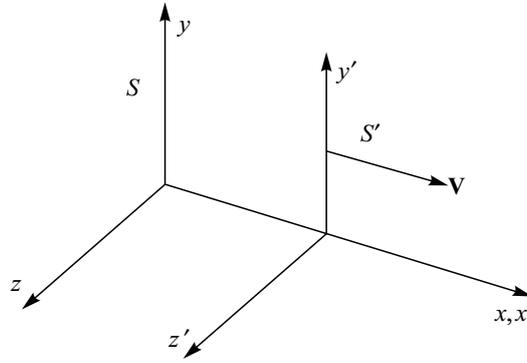


Рис. 5.2. Две инерциальные системы отсчета.

составляет примерно 30 тысяч световых лет. В результате ускорение равно

$$a = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \approx \frac{3 \cdot 10^7 \text{ см/сек}^2}{\frac{3 \cdot 10^{22} \text{ см}}{30 \text{ тыс. свет. лет}}} \approx 3 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}}{\text{сек}^2}, \quad (5.9)$$

то есть это совершенно ничтожная величина. Поэтому иногда говорят, что система отсчета, связанная с неподвижными звездами, может считаться инерциальной с очень хорошей степенью точности.

Если существует хотя бы одна инерциальная система, то таких систем должно быть бесконечное множество, так как любая система, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной, тоже является инерциальной. Существует фундаментальный физический принцип, который называется **принципом относительности Галилея**¹.

Основные законы физики одинаково формулируются для всех систем отсчета, которые движутся относительно друг друга с постоянной скоростью (то есть без ускорения).

Согласно этому принципу, наблюдатель, находящийся в кабине без окон, не может экспериментально определить, покоится он или находится в равномерном прямолинейном движении относительно неподвижных звезд. Только глядя в окно и имея, таким образом, возможность сравнивать свое движение с движением звезд, наблюдатель может сказать, что он равномерно движется относительно них. Но даже и тогда он не мог бы решить, сам ли он движется или движутся звезды. Принцип относительности Галилея был одним из первых основных принципов физики. Он является основным для картины Вселенной, предложенной Ньютоном. Этот принцип выдержал многократную экспериментальную проверку и служит сейчас одним из краеугольных камней специальной теории относительности.

Постараемся теперь придать принципу относительности Галилея математическую форму. Обозначим через S какую-либо инерциальную декартову систему координат, а через S' — другую инерциальную декартову систему координат, которая движется со скоростью \mathbf{V} относительно первой (рис. 5.2). Пусть x', y', z' , оси системы S' , направлены параллельно осям x, y, z системы S . Выберем эти оси так, чтобы вектор \mathbf{V} был направлен параллельно оси x . Мы хотим сравнить результаты измерения времени и расстояний, которые сделаны неподвижным относительно системы S наблюдателем, с такими же измерениями, которые выполнены наблюдателем, покоящимся относительно системы S' . Каким будет результат такого сравнения, можно будет окончательно решить только с помощью опыта.

Если каждый из двух наблюдателей располагает большим числом часов с совершенно одинаковым ходом, то они могут проделать следующее. Пусть сначала наблюдатель в системе S распределит свои часы вдоль оси x и установит их все на одно и то же время. Осуществить это совсем не просто, но мы отложим анализ того, как следует точно выполнять эти измерения, до тех пор, пока аналогичный опыт не будет рассмотрен нами с точки зрения специальной теории относительности. Если мы будем считать скорость света бесконечно большой, то надо только “посмотреть” на все эти часы, чтобы удостовериться, что их начальные показания одинаковы. Теперь мы можем сравнить показания часов в системе S' с показаниями часов 1, 2, 3, ... в системе S , когда часы в системе S' проходят мимо каждых часов в системе S . В результате мы приходим к выводу, что

$$t' = t \quad (V \ll c). \quad (5.10)$$

¹Во времена Галилея под законами физики понимались в основном законы механики. Лишь позднее этот принцип был объединен с конечностью скорости распространения взаимодействий и стал называться **принципом относительности Эйнштейна**. Во времена же Галилея скорость распространения взаимодействий считалась бесконечной.

Это означает, что результаты отсчетов времени, выполненных в системе S' , равны результатам отсчетов времени в системе S . Здесь t означает время события в системе S , а t' — время события в системе S' .

Мы можем даже определить относительные размеры неподвижной и движущейся метровой линейки. Мы хотим знать, какой размер для наблюдателя в системе S имеет метровая линейка, которая покоится в системе S' . Простой способ определить это заключается в использовании часов для регистрации положения обоих концов движущейся метровой линейки. Эта регистрация производится одновременно, то есть при одном и том же показании часов, находящихся в системе S у переднего и заднего концов этой линейки. Экспериментально мы находим, что

$$L' = L (V \ll c). \quad (5.11)$$

Мы можем теперь выразить равенства $t' = t$ и $L' = L$ в виде преобразования, связывающего координаты x', y', z' и время t' какого-либо события, измеренные в системе S' , с координатами x, y, z , и временем t этого же события в системе S . Предположим, что в начальный момент времени, который одинаков для обеих систем, то есть при $t = 0$ и $t' = 0$, начала координат обеих систем совпадают. Тогда, если мы выберем совершенно одинаковые масштабы длин, то получим следующие уравнения преобразования:

$$t = t', \quad x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z'. \quad (5.12)$$

Это преобразование называется **преобразованием Галилея**. В векторной форме его, очевидно, можно записать так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t'. \quad (5.13)$$

Если сопоставить преобразование Галилея с основным постулатом о том, что законы физики, определенные в системах S и S' , должны быть тождественными, то мы можем сделать такой вывод.

Основные законы физики должны быть инвариантными относительно преобразований Галилея (то есть не должны изменяться относительно них).

Этот вывод имеет более **частный** характер, чем принцип относительности Галилея, так как мы считали, что скорость света бесконечна, из чего следовало, что можно одновременно синхронизировать часы в обеих системах отсчета, то есть что $t' = t$. На самом деле из-за конечности скорости света основными преобразованиями, относительно которых должны быть инвариантными все законы природы, являются **преобразования Лоренца**, а не Галилея. Именно они адекватно выражают принцип относительности Галилея (не путать: принцип относительности Галилея верен точно, а преобразования Галилея — приближенно при условии, что $V \ll c$).

Давайте теперь рассмотрим второй закон Ньютона с точки зрения его инвариантности относительно преобразований Галилея:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (5.14)$$

Поскольку $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, а $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, то из преобразований Галилея следует, что

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} + \mathbf{V}, \quad \text{или } \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (5.15)$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'} \quad (\text{так как } \mathbf{V} = \text{const}), \quad (5.16)$$

или $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, то есть ускорения материальной точки в обеих системах совпадают. С другой стороны, из принципа относительности следует, что второй закон Ньютона должен выглядеть одинаково в обеих системах отсчета, то есть

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F}, \\ m\mathbf{a}' &= \mathbf{F}' \end{aligned} \quad (5.17)$$

(полагаем, что масса от скорости не зависит). Поскольку $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, то следовательно, и $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$, то есть сила, действующая на частицу в любой инерциальной системе отсчета, одна и та же.

С этим утверждением, например, согласуется закон всемирного тяготения, согласно которому между двумя телами действует сила притяжения, пропорциональная произведению масс этих тел и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}. \quad (5.18)$$

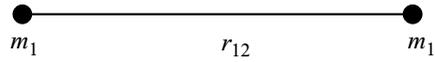


Рис. 5.3. Сила гравитационного притяжения двух точечных масс зависит только от расстояния между ними r_{12} . Оно одинаково во всех инерциальных системах отсчета (при условии, что $V \ll c$).

Очевидно, что эта величина будет одинаковой во всех инерциальных системах отсчета, поскольку одинаково расстояние между двумя точками 1 и 2:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}'_1 + \mathbf{V}t', \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}'_2 + \mathbf{V}t'. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_{12}, \tag{5.20}$$

при этом мы предполагали, что массы тел не зависят от скорости, то есть одинаковы в обеих инерциальных системах отсчета.

Закон сохранения импульса. Центр инерции. Движение центра инерции. Связь закона сохранения импульса с принципом относительности Галилея

Второй закон Ньютона можно переписать в таком виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \quad (6.1)$$

где мы ввели величину

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (6.2)$$

называемую в физике **импульсом**. При этом мы предполагали, что масса частицы m от скорости (а значит и от времени) не зависит:

$$m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (6.3)$$

А если зависит? В какой форме справедлив второй закон Ньютона, описывающий движение релятивистских частиц? Ответ:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (6.4)$$

Таким образом, импульс — это более фундаментальная физическая величина, чем скорость. Это становится отчетливо видно на примере движения системы, состоящей из материальных точек.

Рассмотрим, например, свободное движение двух тел с массами m_1 и m_2 , связанных друг с другом пружиной, которую для простоты мы будем считать невесомой (рис. 6.1). На эту систему не действуют внешние силы, поэтому, согласно первому закону Ньютона, система должна либо находиться в покое, либо двигаться с постоянной по величине и направлению скоростью. Но скорость каждого из тел в процессе движения сложным образом меняется по величине и направлению, поскольку система одновременно совершает **поступательное**, **колебательное** и **вращательное** движения. Значит, первый закон Ньютона применим не ко всем точкам системы. А тогда где же находится та точка, которая движется с постоянной скоростью? Она существует (хотя бы одна), иначе первый закон Ньютона не был бы справедливым.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, запишем уравнение, выражающее второй закон Ньютона, для каждой из материальных точек 1 и 2:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21}, \quad (6.5)$$

где \mathbf{F}_{12} — сила, действующая со стороны второй частицы на первую, а \mathbf{F}_{21} — сила, действующая со стороны первой частицы на вторую. Согласно третьему закону Ньютона, эти силы равны по величине и противоположны по направлению:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}. \quad (6.6)$$

Сложим теперь два уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0. \quad (6.7)$$

Это можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0. \quad (6.8)$$

В результате получаем **закон сохранения импульса** системы двух тел

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const}. \quad (6.9)$$

Подставляя сюда выражение для импульсов частиц, получаем после следующей цепочки преобразований

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \text{const}, \text{ или} \quad (6.10)$$

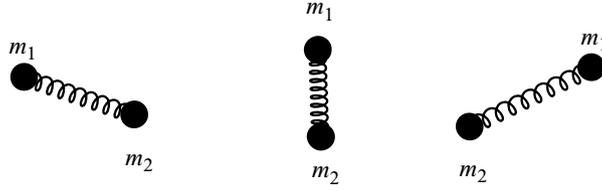


Рис. 6.1. Свободное движение двух тел, связанных пружинкой.

$$m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \text{const}, \text{ или} \quad (6.11)$$

$$\frac{d(m_1\mathbf{r}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{r}_2)}{dt} = \text{const}, \text{ или} \quad (6.12)$$

$$\frac{d}{dt} (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) = \text{const}. \quad (6.13)$$

Разделив обе части последнего равенства на суммарную массу, $m = m_1 + m_2$, получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{\text{const}}{m_1 + m_2} = \text{const}'. \quad (6.14)$$

Введем теперь вектор

$$\mathbf{R}_c \equiv \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (6.15)$$

Точка с координатами \mathbf{R}_c называется **центром инерции** (или **центром масс**) системы из двух материальных точек. Из уравнения (6.14) следует, что, каким бы сложным ни казалось движение каждой из масс, производная $d\mathbf{R}_c/dt = \text{const}$. Таким образом, центр инерции движется с постоянной скоростью (независимо от наличия колебательного и вращательного движения системы). Обозначим эту скорость как \mathbf{V}_c :

$$\frac{d\mathbf{R}_c}{dt} = \mathbf{V}_c. \quad (6.16)$$

Подставляя сюда выражение для \mathbf{R}_c и дифференцируя, получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \mathbf{V}_c. \quad (6.17)$$

Эта формула определяет скорость центра инерции \mathbf{V}_c через массы и скорости составляющих систему частиц. К движению именно этой точки относится первый закон Ньютона, и скорость этой точки надо считать скоростью движения системы как целого¹. Если мы согласимся на такое определение скорости движения системы как целого, то тогда импульс системы как целого должен быть равен произведению суммарной массы системы $m_1 + m_2$ на ее скорость \mathbf{V}_c , то есть $(m_1 + m_2)\mathbf{V}_c$. С другой стороны,

$$(m_1 + m_2)\mathbf{V}_c = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (6.18)$$

и импульс системы оказывается равным сумме импульсов составляющих ее частиц. Таким образом, импульс, как говорят, — величина **аддитивная**, то же самое можно сказать и о массе тела. Мы показали, что в отсутствие внешних сил этот импульс не меняется со временем, то есть сохраняется. Очевидно, что все вышесказанное можно отнести и к системе с большим числом материальных точек.

Если на систему теперь действуют внешние силы, например на первое тело \mathbf{F}_1 и на второе \mathbf{F}_2 , то уравнения движения для каждой из материальных точек запишутся в виде

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_1, \quad (6.19)$$

$$\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_2.$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad \text{или} \quad (6.20)$$

$$m \frac{d\mathbf{V}_c}{dt} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2.$$

¹В системе отсчета, движущейся со скоростью \mathbf{V}_c , импульс системы материальных точек равен нулю.

Отсюда следует, что

центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила — геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Примером может служить движение снаряда по параболе в безвоздушном пространстве. Если в какой-либо момент времени снаряд разорвется на мелкие осколки, то эти осколки будут далее разлетаться в разные стороны. Однако центр масс осколков и газов, образовавшихся при взрыве, будет продолжать свое движение по параболической траектории, как если бы никакого взрыва не было.

Принцип относительности Галилея и закон сохранения импульса

Сформулировав принцип относительности Галилея и законы Ньютона, мы нашли, что они не противоречат друг другу, то есть второй закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея. Затем из второго и третьего законов Ньютона мы вывели закон сохранения импульса (этих двух законов, по существу, достаточно: первый закон — частный случай второго, когда сила равна нулю). Таким образом, возникает естественное желание проверить закон сохранения импульса с точки зрения принципа относительности Галилея. А именно: давайте покажем, что если этот закон сохранения верен в одной инерциальной системе, то он верен и во всех остальных системах, движущихся относительно нее с постоянной скоростью.

Действительно, рассмотрим две системы координат S и S' и пусть последняя движется со скоростью \mathbf{V} относительно первой. Тогда, если \mathbf{v} — это скорость частицы в системе S , а \mathbf{v}' — скорость в системе S' , то, как мы видели, эти скорости связаны соотношением

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (6.21)$$

Пусть теперь в системе отсчета S происходит столкновение двух частиц m_1 и m_2 со скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 . В результате столкновения они разлетаются, но уже с другими скоростями \mathbf{w}_1 и \mathbf{w}_2 . Закон сохранения импульса в системе отсчета S выглядит тогда следующим образом:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{w}_1 + m_2 \mathbf{w}_2. \quad (6.22)$$

Подставляя сюда

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}'_1 + \mathbf{V}, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}'_2 + \mathbf{V}, \\ \mathbf{w}_1 &= \mathbf{w}'_1 + \mathbf{V}, & \mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}'_2 + \mathbf{V}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

мы получим

$$m_1(\mathbf{v}'_1 + \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{v}'_2 + \mathbf{V}) = m_1(\mathbf{w}'_1 + \mathbf{V}) + m_2(\mathbf{w}'_2 + \mathbf{V}), \text{ или} \quad (6.24)$$

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 + (m_1 + m_2) \mathbf{V} = m_1 \mathbf{w}'_1 + m_2 \mathbf{w}'_2 + (m_1 + m_2) \mathbf{V}.$$

Сокращая на $(m_1 + m_2) \mathbf{V}$, мы приходим к выводу, что и в системе S' выполняется закон сохранения импульса:

$$m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = m_1 \mathbf{w}'_1 + m_2 \mathbf{w}'_2. \quad (6.25)$$

Этот вывод можно обобщить и на тот случай, когда массы частиц в процессе соударения перераспределяются, но имеет место закон сохранения массы:

$$m_1 \rightarrow M_1 \text{ и } m_2 \rightarrow M_2, \text{ но } m_1 + m_2 = M_1 + M_2. \quad (6.26)$$

Таким образом, закон сохранения импульса не противоречит принципу относительности Галилея.

Если импульс сохраняется в одной инерциальной системе, то он сохраняется и в любой другой системе, движущейся относительно нее с произвольной скоростью прямолинейно и равномерно.

После этого утверждения возникает один интересный вопрос. Нельзя ли вывести закон сохранения импульса, исходя из одного только принципа относительности Галилея? Замечательно то, что ответ на этот вопрос утвердительный.

Давайте сначала рассмотрим случай, когда два совершенно одинаковых тела связаны между собой пружинкой или чем-то еще в таком роде и покоятся, а затем вдруг они освобождаются и разлетаются под действием этой пружины, или быть может небольшого взрыва, в разные стороны (рис. 6.2). Для простоты рассмотрим движение только в одном направлении. Предположим также, что эти два тела расположены абсолютно симметрично. Когда между ними произойдет взрыв, одно из них полетит направо с некоторой скоростью v . Тогда естественно, что другое тело полетит налево с той же самой скоростью v , поскольку оба тела подобны и нет никаких оснований считать, что левая сторона окажется предпочтительней правой. В результате, вследствие симметрии, импульс системы сохраняется (он равен нулю до взрыва и после взрыва).

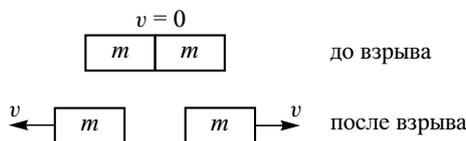


Рис. 6.2. Разлет двух равных масс в результате взрыва.

Теперь рассмотрим обратный процесс, когда два совершенно одинаковых тела движутся навстречу друг другу с равными скоростями, а после столкновения слипаются (рис. 6.3). Здесь опять на помощь приходят соображения симметрии (то есть что между левой и правой сторонами нет никакого различия), из которых следует, что образовавшееся тело должно стоять на месте. Теперь посмотрим на этот же процесс в системе отсчета, в которой первое тело покоится (рис. 6.4). Тогда второе движется ему навстречу со скоростью $2v$. Очевидно, что тогда в этой системе отсчета слипшиеся тела будут двигаться налево со скоростью, в два раза меньшей и равной v . Отсюда следует вывод, что если на покоящееся тело налетает другое такое же тело, которое движется со скоростью v , то после соударения оба слипшихся тела будут двигаться в том же направлении со скоростью, в два раза меньшей, $v/2$ (см. рис. 6.5). Импульс опять сохраняется!

Точно так же можно рассмотреть неупругое столкновение двух одинаковых тел, каждое из которых движется с произвольной скоростью. Представим себе, что одно тело летит со скоростью v_1 , а другое — со скоростью v_2 в том же направлении ($v_1 > v_2$) (рис. 6.6). Какой будет их скорость после соударения? Давайте снова перейдем в систему отсчета, в которой второе тело покоится. В ней первое тело налетает на второе (покоящееся) со скоростью $v_1 - v_2$. Мы знаем, что в такой ситуации после соударения скорость слипшегося тела будет равна $(v_1 - v_2)/2$. В исходной же системе отсчета она будет на v_2 больше, то есть равной

$$\frac{v_1 - v_2}{2} + v_2 = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

В результате мы снова имеем закон сохранения импульса

$$mv_1 + mv_2 = 2m \cdot \frac{1}{2}(v_1 + v_2). \quad (6.27)$$

Таким образом, принцип относительности Галилея позволяет разобраться в любом неупругом соударении одинаковых масс. И хотя мы рассмотрели чисто одномерную ситуацию, ее легко обобщить на произвольный случай. Надо только перейти в систему отсчета, движущуюся не вдоль направления движения тел, а под каким-нибудь углом. Принцип остается тем же самым, хотя детали немного усложняются.

Продвинемся немного дальше. Рассмотрим три одинаковых тела. Первые два скреплены пружиной (или между ними заложен взрыватель), а рядом на очень близком расстоянии Δ находится третье тело. Пусть теперь произойдет “взрыв”. Два первых тела разлетятся со скоростями v в разные стороны. Через небольшой промежуток времени (Δ/v) второе тело сталкивается с третьим и слипается с ним. Образовавшееся новое тело, как мы уже убедились, будет двигаться вправо со скоростью $v/2$ (рис. 6.7).

А что произойдет, если взрыв устроить между телом массы m и телом массы $2m$? Ответ очевиден. Для этого надо повторить предыдущий эксперимент с $\Delta = 0$ (см. рис. 6.8)!

Давайте теперь обратим движение вспять, то есть прокрутим “ленту” в обратную сторону. Что произойдет, если тело массы m летит со скоростью v навстречу телу массы $2m$, скорость которого равна $v/2$? Интуитивно кажется, что, когда тела слипнутся, результирующая скорость будет равна

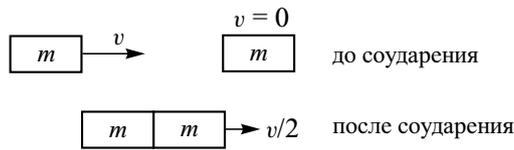


Рис. 6.5. Неупругое соударение двух равных масс, одна из которых покоится, — итог.

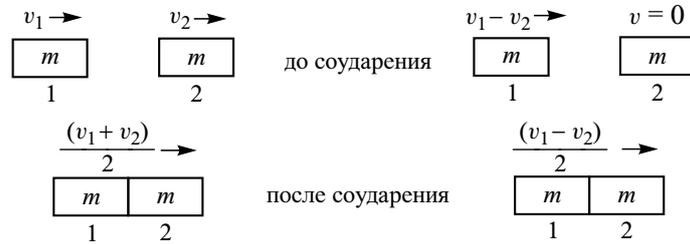


Рис. 6.6. Неупругое соударение двух равных масс, движущихся с произвольной скоростью. Слева — лабораторная система отсчета, справа — система отсчета, связанная с одной из масс.

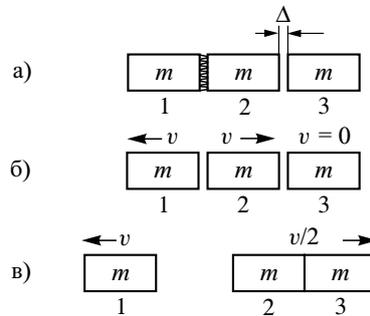


Рис. 6.7. Три одинаковых массы: а) ситуация до взрыва, б) через очень короткое время после взрыва, в) спустя некоторое время после взрыва.

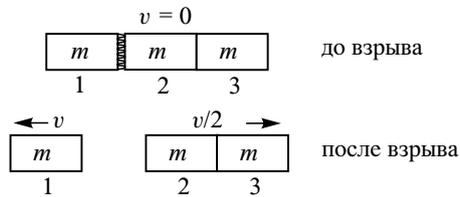


Рис. 6.8. Разлет тел массы m и массы $2m$.

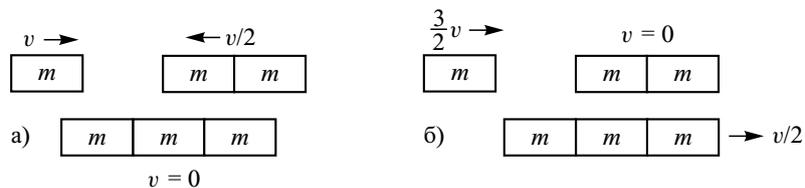


Рис. 6.9. а) Неупругое столкновение двух тел с массами m и $2m$. б) То же самое, но в системе отсчета, в которой тело массы $2m$ покоится.

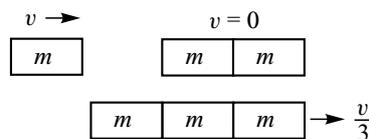


Рис. 6.10. Окончательный итог.

Сила. Уравнение движения Ньютона. Основные задачи динамики материальной точки. Работа. Кинетическая энергия. Консервативные и неконсервативные силы. Принцип обратимости движения в поле консервативных сил

Итак, для того чтобы определить движение материальной точки, надо решить уравнение движения Ньютона

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (7.1)$$

где сила \mathbf{F} в общем случае может зависеть от:

- координат частицы \mathbf{r} (колебания груза на пружине, $F = -kx$, движение Земли вокруг Солнца, $F \sim 1/r^2$),
- скорости частицы \mathbf{v} (сила трения: при больших скоростях $\sim v^2$, а при малых $\sim v$),
- времени t (переменное во времени воздействие).

Так, например, если заряженная частица движется в электрическом и магнитном полях, то на нее действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}], \quad (7.2)$$

где q заряд частицы. Заметим, что здесь оба слагаемых — полярные векторы!

Однако, как известно, заданием силы движение однозначно еще не определяется. Необходимо задать также **начальные условия** $\mathbf{r}(0)$ и $\mathbf{v}(0)$, то есть значения координаты и скорости в некоторый начальный момент времени $t = 0$.¹ Тогда, как доказывается в математике, уравнение (7.1) будет иметь единственное решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Поскольку в уравнение, описывающее второй закон Ньютона, входят не только сама функция $\mathbf{r}(t)$, но и ее первая, $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, и вторая, $d^2\mathbf{r}/dt^2 = \mathbf{a}$, производные по времени, это уравнение называется **дифференциальным уравнением второго порядка**. Не существует универсальной теории или рецепта, как решать такие уравнения в общем случае. Достаточно хорошо разработаны лишь численные методы, но для них часто безразлично, насколько сложным выглядит выражение для силы. Однако в достаточно простых случаях такие решения могут быть найдены аналитически.

Работа

Как известно из курса физики средней школы, работа — это скалярная величина, равная произведению силы на перемещение и на косинус угла между ними. Для конечного перемещения $\Delta \mathbf{r}$ имеем

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = F \Delta r \cos \alpha, \quad (7.3)$$

где мы воспользовались понятием скалярного произведения двух векторов.

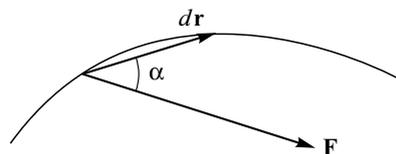


Рис. 7.1. Работа равна скалярному произведению силы на перемещение.

В общем случае, когда материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории L , проходит путь конечной длины, этот путь можно мысленно разбить на бесконечно малые участки, на каждом из которых сила \mathbf{F} может считаться приближенно постоянной, а элементарная работа может быть

¹ Можно задать две других величины, например значение координаты (или скорости) в два разных момента времени.

вычислена по формуле $dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Если теперь сложить все эти элементарные работы, то получим выражение для работы в виде интеграла

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (7.4)$$

Это выражение называется **криволинейным интегралом** от вектора \mathbf{F} вдоль кривой L .

Работа силы, отнесенная к единице времени, называется **мощностью**:

$$P = \frac{dA}{dt}. \quad (7.5)$$

Поскольку

$$dA = \frac{dA}{dt} dt = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt, \quad (7.6)$$

то формулу для работы можно переписать в виде

$$A = \int_{t_1}^{t_2} P dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt, \quad (7.7)$$

то есть можно выразить работу через интеграл от мощности по времени, или через интеграл по времени от скалярного произведения силы на скорость частицы. В последнем случае ясно, что если сила, действующая на частицу, перпендикулярна скорости \mathbf{v} , то работа такой силы равна нулю. Поэтому, например, магнитное поле никакой работы над частицей не производит (смотри второе слагаемое в формуле (7.2)).

Воспользуемся теперь формулой второго закона Ньютона и выразим силу через производную от импульса по времени $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$:

$$A = \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}. \quad (7.8)$$

Поскольку $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, то $d\mathbf{p} = m d\mathbf{v}$. Поэтому

$$A = \int d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \int m d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = m \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = m \int d\frac{v^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \text{const}. \quad (7.9)$$

При этом мы воспользовались тем, что $dv^2 = d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$. Если теперь мы будем рассматривать работу силы при перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2, то искомая работа будет равна

$$A_{12} = \int_1^2 d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \left. \frac{mv^2}{2} \right|_1^2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (7.10)$$

Как известно, скалярная величина

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad (7.11)$$

называется **кинетической энергией** частицы. Таким образом, мы доказали, что

работа силы по перемещению материальной точки равна приращению ее кинетической энергии.

При этом под силой надо, однако, понимать полную силу, действующую на точку. Так, например, если вы тащите санки по не очень скользкой дороге (посыпанной песком), то работа, которую вы совершаете, отлична от нуля. Однако никакого приращения кинетической энергии санок не происходит. Все дело в том, что сила трения тоже производит работу (отрицательную). В результате полная сила и полная работа оказываются равными нулю.

Полученный результат может быть без труда обобщен на случай произвольной системы материальных точек. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых состоит эта система:

$$K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (7.12)$$

В результате:

Суммарная работа всех сил, действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.

При этом нужно учитывать также и работу всех внутренних сил. Сравните: внутренние силы суммарный импульс системы не изменяют (только внешние), а кинетическую энергию системы изменяют. Например, в процессе соударения существует момент, когда два сталкивающихся тела останавливаются. Кинетическая энергия системы в этот момент равна нулю, а энергия упругой деформации максимальна. Если соударение упругое, то после него кинетическая энергия, разумеется, восстанавливается и остается такой же, как и до соударения.

Консервативные и неконсервативные силы

Все силы, встречающиеся в механике макроскопических тел, принято разделять на **консервативные** и **неконсервативные**. Консервативными называются силы, работа которых не зависит от формы пути между двумя точками (при перемещении тела между ними).

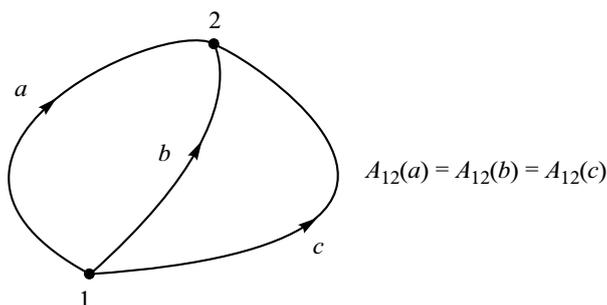


Рис. 7.2. Работа консервативной силы не зависит от пути перехода.

Примером консервативных сил является, например, сила тяжести. Вычислим работу этой силы при переходе материальной точки из положения 1 в положение 2 вдоль прямолинейного отрезка r_{12} :

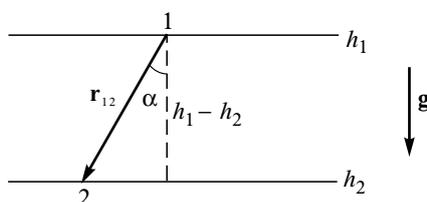


Рис. 7.3. Работа силы тяжести зависит только от разности высот $h_1 - h_2$.

$$A_{12} = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}_{12} = mgr_{12} \cos \alpha = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \quad (7.13)$$

где h_1 и h_2 — высоты, на которых находилась материальная точка в начале и в конце пути. Они отсчитываются от какого-либо произвольного уровня, например от земной поверхности или от уровня моря.

Формула для работы $A_{12} = mgh_1 - mgh_2$ остается справедливой и при перемещении вдоль произвольной кривой $1a2$ или $1b2$. Для доказательства этого утверждения надо разбить весь путь горизон-

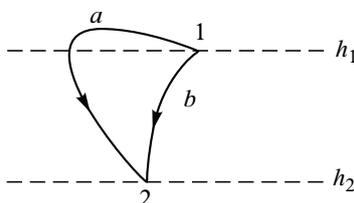


Рис. 7.4. То же, что и на предыдущем рисунке, но в случае криволинейной траектории частицы.

тальными плоскостями на малые участки, каждый из которых может быть принят за прямолинейный. Применив к каждому участку выведенную формулу $A_{12} = mgh_1 - mgh_2$ и сложив полученные работы, мы приходим к прежнему результату. Таким образом,

работа силы тяжести не зависит от формы пути. Она определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.

Кроме того, сравнивая

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \text{и} \quad A_{12} = mgh_1 - mgh_2,$$

приходим к выводу, что

$$mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = mgh_2 + \frac{mv_2^2}{2},$$

то есть при движении в поле силы тяжести сохраняется величина

$$E = mgh + \frac{mv^2}{2} = \text{const.} \quad (7.14)$$

Она, как вы знаете, называется **полной энергией** системы и складывается из кинетической и **потенциальной энергии**. Под потенциальной энергией здесь надо понимать величину $U = mgh$.

Вторым примером консервативных сил являются так называемые **центральные силы**. Так называется сила, которая всегда направлена по радиус-вектору, соединяющему материальную точку с некоторой точкой в пространстве, и зависит только от расстояния до этой точки (рис. 7.5). Сама эта точка называется центром силы, или силовым центром. Примером таких сил могут служить силы

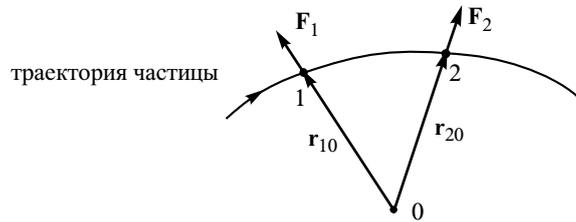


Рис. 7.5. Точка 0 — силовой центр. Силы $F_1(r_{10})$ и $F_2(r_{20})$ зависят только от расстояния до центра. гравитационного притяжения Земли к Солнцу (или Луны к Земле). Для того чтобы рис. 7.5 соответствовал этому случаю, надо только изменить направления сил на рисунке на противоположные, так как там они изображены как силы отталкивания.

Покажем, что работа центральных сил также не зависит от формы пути и определяется только начальным и конечным положениями материальной точки. Для этого произведем бесконечно малое перемещение $d\mathbf{r}$. При этом $|d\mathbf{r}| \cos \alpha = dr$, где dr — приращение расстояния до центра (смотри

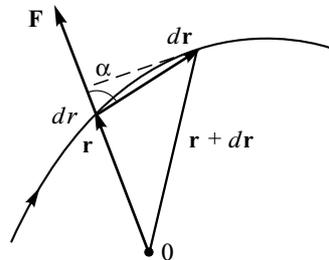


Рис. 7.6. Работа центральных сил.

рис. 7.6). Таким образом, $dA = Fdr$ и

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr. \quad (7.15)$$

Значение определенного интеграла зависит только от нижнего и верхнего пределов r_1 и r_2 и, таким образом, не зависит от формы пути.

Рассмотрим пример. Так, сила гравитационного притяжения между двумя точечными массами m и M зависит только от расстояния r между ними:

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (7.16)$$

Поместим начало координат в точку, где расположено одно тело массы M (пусть это, скажем, будет Земля), тогда второе тело массы m , находящееся на расстоянии r от первого, притягивается к нему с силой (7.16) (рис. 7.7).

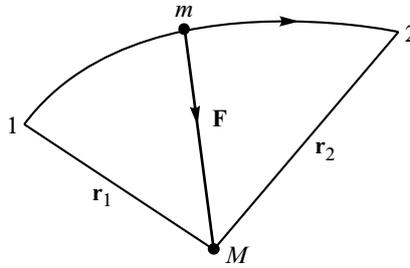


Рис. 7.7. Работа силы гравитационного притяжения двух точечных масс.

Работа этой силы определяется выражением

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} = -GmM \int_1^2 \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -GmM \int_1^2 \frac{dr}{r^2} = -GmM \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = GmM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (7.17)$$

При этом мы воспользовались тем, что $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (1/2)dr^2 = r dr$. Таким образом,

$$A_{12} = \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1}. \quad (7.18)$$

Учитывая, что работа равна изменению кинетической энергии,

$$A_{12} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1}, \quad (7.19)$$

мы получаем, что в процессе движения остается постоянной величина

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GmM}{r_1} = \text{const.} \quad (7.20)$$

Она, как и прежде, называется полной энергией и складывается из кинетической и потенциальной энергии,

$$E = T + U, \quad (7.21)$$

причем под потенциальной энергией здесь следует понимать величину

$$U = -\frac{GmM}{r}. \quad (7.22)$$

Она отрицательна, так как соответствует притяжению.

Рассмотрим теперь замкнутый контур, который соединяет точки 1 и 2. Если сила консервативна, то $A_{132} = A_{142}$. Если мы изменим направление движения и будем двигаться не от 1 к 2, а от 2 к 1,

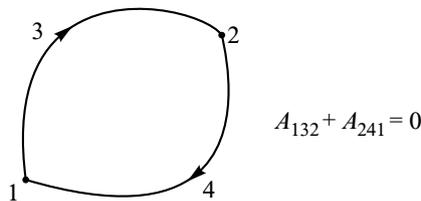


Рис. 7.8. Работа консервативных сил на замкнутом контуре равна нулю.

то на каждом отрезке нашего пути сила будет той же самой, а перемещение изменит знак, то есть

$$A_{142} = -A_{241}, \quad (7.23)$$

в результате

$$A_{132} = -A_{241}, \quad \text{или} \quad A_{132} + A_{241} = 0. \quad (7.24)$$

Таким образом, мы приходим к важному результату, что

работа консервативных сил на замкнутом контуре равна нулю.

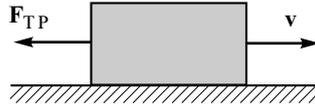


Рис. 7.9. Сила трения всегда направлена против скорости частицы.

Все силы, не являющиеся консервативными, называются **неконсервативными силами**. К ним относятся, прежде всего, так называемые **диссипативные силы**, например силы трения, возникающие при скольжении одного тела относительно другого. Сила трения в этом случае всегда направлена против скорости движения, то есть против перемещения тела. Работа этой силы всегда отрицательна. И если тело сместилось налево, а потом вернулось назад, то очевидно, что суммарная работа будет величиной отрицательной и не равной нулю. Таким образом, работа силы трения скольжения при движении по замкнутому контуру не равна нулю! К неконсервативным силам относятся также силы

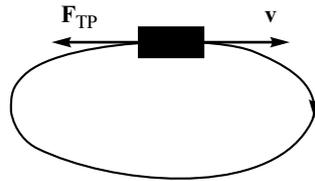


Рис. 7.10. Работа силы трения на замкнутом контуре не равна нулю.

сопротивления, которые действуют на тело при его движении в жидкой или газообразной среде. Эти силы называют иногда силами вязкого трения. В отличие от трения скольжения, они всегда зависят от абсолютной величины скорости тела! И направлены противоположно ей.

Здесь необходимо отметить, что на микроскопическом уровне, как это выяснено на сегодняшний день, все силы, действующие между элементарными частицами, консервативны! Таким образом, неконсервативность сил на макроскопическом уровне — это есть следствие того, что мы не рассматриваем детально движение составляющих тело атомов, молекул, электронов и т.д. Если бы мы могли представить себе замкнутый контур в **конфигурационном пространстве** всех составляющих тело частиц, то тогда работа всех сил при движении по этому контуру была бы всегда равна нулю. А так в исходное положение возвращается одно лишь макроскопическое тело, и то приближенно, поскольку составляющие тело молекулы теперь движутся быстрее — тело нагрелось. Нагрелась в результате трения и окружающая тело внешняя среда, то есть она тоже изменила свое состояние. Таким образом, в результате движения макроскопического тела по замкнутому контуру **вся** система, строго говоря, не возвращается в исходное состояние! Поэтому отлична от нуля и работа. Эта работа в конечном счете перешла в тепло. И нет уже способа вернуть затраченную энергию. Этот процесс **необратим!**

Еще один вид сил — это **гироскопические силы**. Они зависят от скорости материальной точки, но направлены всегда перпендикулярно этой скорости. Поэтому работа таких сил всегда равна нулю. Из-за этого их можно условно отнести к консервативным. Единственным примером гироскопических сил в инерциальных системах отсчета является сила Лоренца, действующая на заряд, движущийся в магнитном поле,

$$\frac{q}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]. \quad (7.25)$$

Принцип обратимости движения в поле консервативных сил

Для того чтобы сила была консервативной, достаточно, чтобы она не зависела от скорости частицы и от времени (явно):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (7.26)$$

Неявно она может зависеть от времени — через зависимость $\mathbf{r}(t)$. В этом случае уравнение движения Ньютона (7.1) инвариантно относительно **операции инверсии времени**

$$t \rightarrow -t. \quad (7.27)$$

Другими словами, если мы нашли решение $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ уравнения движения

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (7.28)$$

то решением этого уравнения будет также и функция $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(-t)$. Последнее справедливо потому, что операция двукратного дифференцирования инвариантна относительно замены $t \rightarrow -t$:

$$\frac{d^2}{dt'^2} = \frac{d^2}{dt^2}, \quad (7.29)$$

где $t' = -t$.

Проявлением этой симметрии является то, что если, например, частица движется по некоторой траектории, определяемой какими-то начальными значениями координаты и скорости, и мы в какой-то момент времени обратим движение, изменив скорость частицы на противоположную, то принимая ее за новую начальную скорость, мы увидим, что система будет двигаться обратно по той же точно

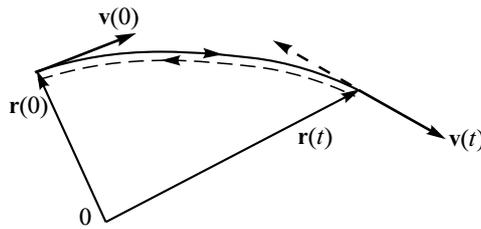


Рис. 7.11. Обращение движения вспять. Частица пойдет назад по той же самой траектории!

траектории и с той же (с точностью до знака) скоростью. Это происходит так, как если бы мы засняли движение частицы на кинолентку и прокрутили пленку назад. Этот важный принцип называется **принципом обратимости движения**. Он справедлив, когда частица (или тело) движется в поле консервативных сил, не зависящих от скорости частицы.

Хотя работа гироскопических сил равна нулю и поэтому их можно отнести к консервативным, к ним не применим в прежнем виде принцип обратимости движения, поскольку эти силы зависят не только от положения материальной точки, но и от ее скорости. Поэтому, например, если заряд движется по какой-либо траектории в электрическом и магнитном полях и мы в какой-то момент времени обратим его движение, то заряд не пойдет назад по той же самой траектории. Это произойдет лишь в том случае, если мы одновременно изменим и знак магнитного поля \mathbf{H} :

$$[\mathbf{v} \times \mathbf{H}] = [(-\mathbf{v}) \times (-\mathbf{H})]. \quad (7.30)$$

Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике. Сила и потенциальная энергия. Одномерное движение. Границы движения. Закон сохранения импульса и энергии как следствие однородности пространства-времени

Для консервативных сил, работа которых не зависит от формы пути, можно ввести важное понятие **потенциальной энергии**. Давайте какое-либо произвольное положение системы, характеризуемое заданием координат ее материальных точек, условно примем за нулевое. Тогда

работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из некоторого положения в нулевое, называется **потенциальной энергией** U системы в этом положении.

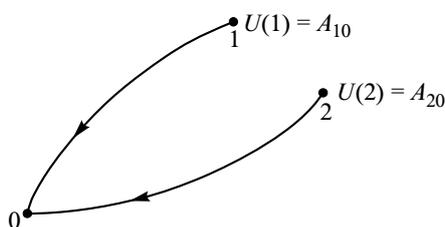


Рис. 8.1. Определение потенциальной энергии.

Работа консервативных сил не зависит от пути перехода, а поэтому потенциальная энергия системы при фиксированном нулевом положении зависит только от координат материальных точек системы в рассматриваемом положении. Иными словами,

потенциальная энергия системы U является функцией только ее координат.

Значение потенциальной энергии, вообще говоря, зависит от того, какое положение системы условно принято за нулевое. Если за нулевое принять положение 0, то в положении 1 система будет обладать потенциальной энергией $U = A_{10}$, равной работе консервативных сил при переходе системы из положения 1 в положение 0. Если же за нулевое принять положение $0'$, то потенциальная энергия будет равна $U' = A_{10'}$. Вследствие консервативности сил

$$A_{10'} = A_{10} + A_{00'} \quad \text{или} \quad U'_1 = U_1 + A_{00'}. \quad (8.1)$$

Работа $A_{00'}$ постоянна, то есть не зависит от координат системы в рассматриваемом состоянии 1. Она полностью определяется выбором нулевых положений 0 и $0'$.

Мы видим, таким образом, что при замене одного нулевого положения другим потенциальная энергия системы изменяется на постоянную величину. Неопределенность можно усилить еще больше, если условиться считать потенциальную энергию в нулевом положении равной не нулю, а какому-либо постоянному произвольному значению. Тогда в приведенном выше определении вместо потенциальной энергии следует говорить об ее **разности** в двух положениях.

Разностью потенциальных энергий в рассматриваемом и нулевом положениях называется работа, совершаемая консервативными силами при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое.

Таким образом, потенциальная энергия определена не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной. Этот произвол нестрашен, так как на самом деле всегда важна лишь разность потенциальных энергий.

Пусть система перешла из положения 1 в положение 2 по какому-либо пути 12. Тогда, как следует из рис. 8.3,

$$A_{12} = A_{10} + A_{02} = A_{10} - A_{20} = U_1 - U_2 = -(U_2 - U_1),$$

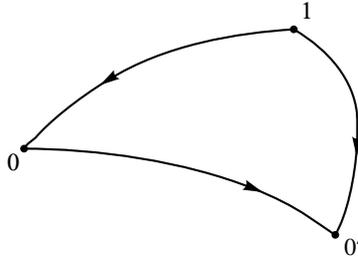


Рис. 8.2. Потенциальная энергия зависит от выбора нулевого положения.

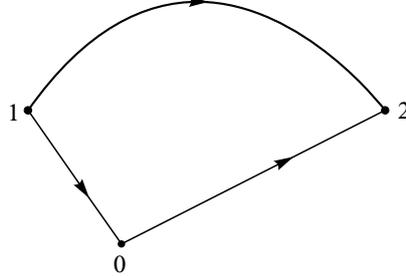


Рис. 8.3. Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы.

то есть работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии системы при переходе ее из точки 1 в точку 2.

С другой стороны, работа силы равна приращению кинетической энергии системы

$$A_{12} = U_1 - U_2 = K_2 - K_1, \quad (8.2)$$

поэтому

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2. \quad (8.3)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергии системы называется ее **полной энергией** E . Мы получили, что полные энергии в положениях 1 и 2 равны: $E_1 = E_2$, или, что то же самое, полная энергия сохраняется:

$$E = K + U = \text{const}. \quad (8.4)$$

Таким образом,

в системе с одними только консервативными (и гироскопическими) силами полная энергия остается неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии системы измениться не может.

Это положение называется **законом сохранения энергии** в механике.

Примеры потенциальной энергии в некоторых простейших случаях:

- $U = mgh$ — потенциальная энергия однородного поля тяжести. Начало отсчета $h = 0$.
- $U = kx^2/2$ — потенциальная энергия растянутой пружины. Начало отсчета $x = 0$.
- $U = -GMm/r$ — потенциальная энергия гравитационного притяжения двух точечных масс m и M . За начало отсчета выбрана бесконечно удаленная точка.

Сила и потенциальная энергия

Зная силу как функцию координат материальной точки $\mathbf{F}(x, y, z)$, можно путем интегрирования (нахождения работы) определить потенциальную энергию системы

$$U_1 = U(x, y, z) - U(0) = A_{10} = -A_{01} = - \int_0^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (8.5)$$

(знак минус перед интегралом обусловлен тем, что при интегрировании в этой формуле мы движемся от точки 0 к точке 1, то есть в направлении, противоположном тому, что изображено на рис. 8.4).

Другая задача — вычисление силы $\mathbf{F}(x, y, z)$ по заданной потенциальной энергии $U(x, y, z)$. Это, естественно, обратная операция — дифференцирование. Пусть у нас есть две бесконечно близкие точки, $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ и \mathbf{r} . Тогда

$$U(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - U(\mathbf{r}) = dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (8.6)$$

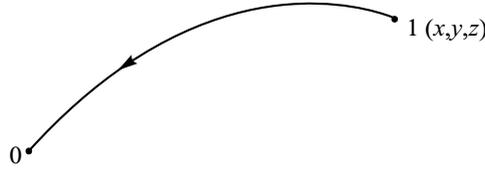


Рис. 8.4. Связь потенциальной энергии с силой.

Расписывая скалярное произведение, получаем

$$dU = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (8.7)$$

Следовательно,

$$F_x = - \left. \frac{dU}{dx} \right|_{y,z=\text{const}} \equiv - \frac{\partial U}{\partial x} \quad (8.8)$$

(это есть **частная производная**) и, аналогично,

$$F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (8.9)$$

Подробнее можно записать

$$F_x(x, y, z) = - \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x} \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, компоненты силы можно найти, дифференцируя потенциальную энергию системы по координатам x, y и z .

Если ввести единичные орты \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} вдоль осей координат X, Y и Z , то формулу для силы можно будет записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} = - \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \\ &= - \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right) \equiv -\text{grad } U, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где мы ввели обозначения:

$$\text{grad } U \equiv \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \equiv \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (8.11)$$

Величина, стоящая слева, называется **градиентом скалярной функции** U ($U(x, y, z)$ — скаляр). Эта величина является вектором, поскольку определяет действующую на материальную точку силу. Таким образом, дифференцирование по координатам скалярной функции дает вектор. Проверим это. Согласно данному нами в лекции 4 определению, вектор — это физическая величина, ведущая себя при преобразовании системы координат следующим образом:

$$A_i = \alpha_{ik} A'_k. \quad (8.12)$$

Поскольку координаты преобразуются как компоненты вектора

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k, \quad \text{или} \quad x'_k = \alpha_{ik} x_i, \quad (8.13)$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x'_k} \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x'_k} \alpha_{ik} = \alpha_{ik} \frac{\partial U}{\partial x'_k}. \quad (8.14)$$

Таким образом, мы видим, что производные $\partial U / \partial x_i$ действительно преобразуются как компоненты вектора.

Наряду с обозначением градиента как $\text{grad } U$ применяется обозначение ∇U , где оператор ∇ (**набла**) определяется следующим образом:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (8.15)$$

Используя это обозначение, мы можем записать

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \nabla U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) U = \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Геометрический смысл градиента

Для выяснения геометрического смысла градиента полезно ввести **эквипотенциальные поверхности**, то есть такие поверхности, на которых скалярная функция U остается постоянной:

$$U(x, y, z) = \text{const}. \quad (8.17)$$

Пусть U — одна из таких поверхностей, и пусть она проходит через точку пространства O , в которой ищется градиент (рис. 8.5). Поместим в этой точке начало координат. Ось Z направим по нормали к поверхности (\mathbf{n} — единичный орт нормали), а оси X и Y лежат в плоскости, касательной к поверхности в точке O . Поэтому в первом приближении вдоль осей x и y функция U не изменяется:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = 0. \quad (8.18)$$

Следовательно,

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{n}, \quad (8.19)$$

поскольку в нашем случае $\mathbf{k} = \mathbf{n}$. Если U возрастает в направлении оси Z , то $\partial U / \partial z > 0$ и, следовательно, градиент направлен по нормали \mathbf{n} к эквипотенциальной поверхности в сторону возрастания потенциальной энергии. Очевидно, что в этом направлении потенциальная энергия изменяется наиболее быстро:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial n} \mathbf{n}. \quad (8.20)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что

градиент скалярной функции U есть вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$ в сторону возрастания функции U . Его длина численно равна производной от U по нормали к эквипотенциальной поверхности.

Это определение, как говорят, **инвариантно**. Оно не зависит от выбора системы координат.

Наряду с эквипотенциальной поверхностью через каждую точку пространства можно провести так называемую **силовую линию**. Направление касательной к ней в каждой точке совпадает с направлением силы, действующей на частицу в этой точке. Очевидно, что силовые линии и эквипотенциальные поверхности взаимно ортогональны друг другу (рис. 8.6).

Пользуясь понятием градиента, второй закон Ньютона при движении одной материальной точки в силовом поле можно представить в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \quad (8.21)$$

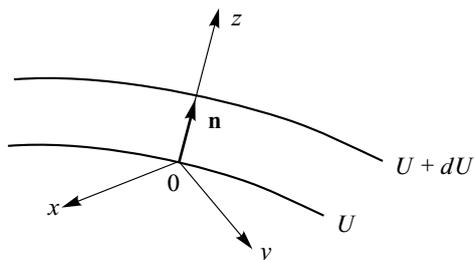


Рис. 8.5. Геометрический смысл градиента ($dU > 0$).

Покажем теперь, как из этого уравнения следует закон сохранения энергии. Умножим для этого правую и левую части уравнения скалярно на скорость частицы $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$:

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{dU(\mathbf{r}(t))}{dt} \quad (8.22)$$

(при этом мы воспользовались правилом дифференцирования сложной функции). Выражение слева можно переписать через производную по времени от кинетической энергии частицы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = -\frac{dU}{dt}, \quad (8.23)$$

или, перенося все в левую часть,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + U \right) = 0 \implies \frac{mv^2}{2} + U = \text{const} \quad (8.24)$$

— получаем закон сохранения энергии. Заметим, что при выводе здесь было важно, чтобы потенциальная энергия частицы не зависела бы явно от времени t (то есть как $U[\mathbf{r}(t), t]$). Зависимость от времени входила в потенциальную энергию лишь **неявно**, через зависимость от времени радиус-вектора частицы $\mathbf{r}(t)$ (то есть как $U[\mathbf{r}(t)]$).

Одномерное движение

В этом случае уравнение движения можно проинтегрировать до конца и выразить ответ через интеграл, или, как говорят в квадратурах. Легче всего это сделать, воспользовавшись законом сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + U(x). \quad (8.25)$$

Поскольку кинетическая энергия всегда положительна, то неравенство

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(x) > 0 \quad (8.26)$$

определяет классически доступные области движения (**границы движения**) в одномерном случае. Другими словами, движение может происходить лишь в областях пространства, где $E > U(x)$.¹

Ниже, на рис. 8.7, показан пример. Согласно этому примеру, движение может происходить лишь на конечном отрезке $x_A < x < x_B$, что соответствует **финитному** движению и в полубесконечном интервале $x_C < x < \infty$. В последнем случае движение **инфинитно**, так как частица может уходить на бесконечность. Точки x_A , x_B и x_C называют **точками остановки**, поскольку скорость в них обращается в нуль.

Найдем теперь зависимость координаты x от времени t . Для этого выразим из уравнения (8.25) скорость

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}. \quad (8.27)$$

Это есть дифференциальное уравнение с **разделяющимися переменными**, которое можно легко проинтегрировать (то есть решить):

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}} = t. \quad (8.28)$$

¹Мы увидим, что в квантовой механике это ограничение отсутствует.

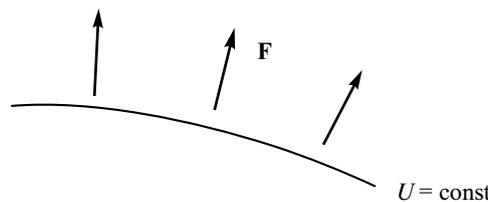


Рис. 8.6. Семейство силовых линий и эквипотенциальных поверхностей взаимно ортогональны друг другу.

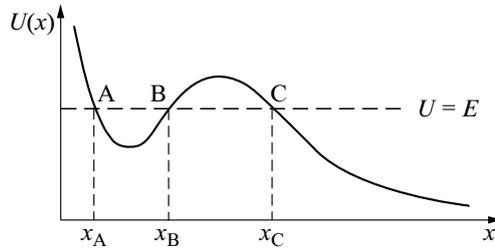


Рис. 8.7. Границы движения в одномерном случае.

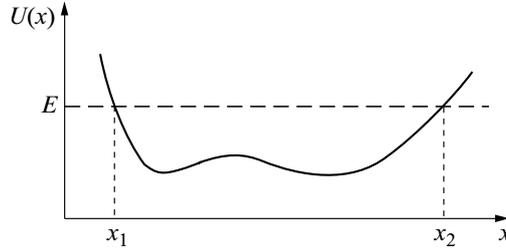


Рис. 8.8. Периодическое движение.

В случае финитного движения, которое мы сейчас рассмотрим, можно вычислить период движения как функцию энергии системы E (см. рис. 8.8):

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (8.29)$$

где x_1 и x_2 — точки поворота, где скорость обращается в нуль, то есть $E = U(x)$.

Применим теперь эту формулу в качестве примера для движения в поле

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}. \quad (8.30)$$

В этом случае $x_2 = -x_1 = \sqrt{2E/k}$ (см. рис. 8.9), поэтому

$$T = \sqrt{2m} \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}} = 2\sqrt{2m} \int_0^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{E - \frac{kx^2}{2}}}. \quad (8.31)$$

Введем теперь новую переменную интегрирования

$$x = \sqrt{\frac{2E}{k}} y \quad \Rightarrow \quad dx = \sqrt{\frac{2E}{k}} dy. \quad (8.32)$$

Тогда

$$T = 2\sqrt{2m} \int_0^1 \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}} dy}{\sqrt{E - \frac{k}{2} \frac{2E}{k} y^2}} = 2\sqrt{2m} \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}}{\sqrt{E}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}. \quad (8.33)$$

Интеграл равен

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \arcsin y. \quad (8.34)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{m}{k}} \arcsin \Big|_0^1 = \\ &= 4\sqrt{\frac{m}{k}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \end{aligned} \quad (8.35)$$

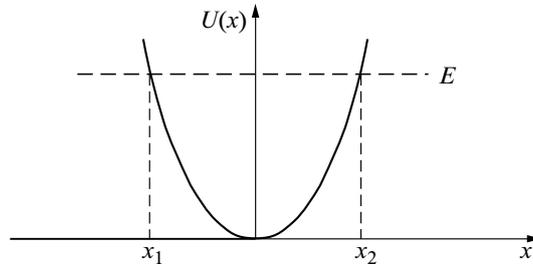


Рис. 8.9. Движение в квадратичном потенциале. Гармонические колебания.

то есть в этом случае получается известная формула

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8.36)$$

для периода колебаний грузика на пружине, который не зависит от энергии (так называемые **гармонические колебания**). Во всех остальных случаях период колебаний зависит от энергии системы (**ангармонические колебания**).

Закон сохранения импульса и энергии и однородность пространства-времени

Если потенциальная энергия не зависит от какой-либо, скажем одной координаты x , то $\partial U/\partial x = 0$, и следовательно,

$$\frac{dp_x}{dt} = 0, \quad (8.37)$$

то есть $p_x = \text{const}$ — сохраняется импульс частицы в этом направлении. Независимость U от координаты x означает, что пространство **однородно** в направлении оси x , то есть что потенциальная энергия не изменяется при любых перемещениях в этом направлении:

$$U(x, y, z) = U(x + a, y, z). \quad (8.38)$$

Таким образом, закон сохранения импульса (проекция) в каком-либо направлении связан с однородностью пространства в этом же направлении.

Похожие выводы можно сделать и в отношении полной энергии системы E . Как мы уже видели, если потенциальная энергия системы $U(x, y, z, t)$ не зависит явным образом от времени t , то есть является функцией только координат системы, $U(x, y, z)$, то имеет место закон сохранения энергии

$$E = T + U = \text{const}. \quad (8.39)$$

Поэтому по аналогии с законом сохранения импульса можно сказать, что закон сохранения энергии связан с **однородностью времени**.

Литература

- [1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1979 — 520 с.
- [2] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклевский курс физики, том 1, Механика. М., Наука, 1975 — 480 с.
- [3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике (1–2 том). М., Мир, 1976 — 440 с.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах, том 1, Механика. М., Наука, 1973 — 208 с.
- [5] Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М., Наука, 1988 — 416 с.

Оглавление

Лекция 5.

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета.
Движение относительно инерциальных систем отсчета.
Законы Ньютона.
Принцип относительности Галилея.
Преобразование Галилея

2

Лекция 6.

Закон сохранения импульса.
Центр инерции.
Движение центра инерции.
Связь закона сохранения импульса с принципом относительности Галилея

7

Лекция 7.

Сила.
Уравнение движения Ньютона.
Основные задачи динамики материальной точки.
Работа.
Кинетическая энергия.
Консервативные и неконсервативные силы.
Принцип обратимости движения в поле консервативных сил

13

Лекция 8.

Потенциальная энергия.
Закон сохранения энергии в механике.
Сила и потенциальная энергия.
Одномерное движение.
Границы движения.
Закон сохранения импульса и энергии как следствие однородности пространства-времени

20

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. Ф. ИОФФЕ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Г. Г. Зегря, Д. А. Паршин

**МОМЕНТ ИМПУЛЬСА.
ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

(конспект лекций по общему курсу физики)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Изотропия пространства. Закон сохранения момента импульса. Движение в центральном поле

Итак, мы пришли к выводу, что законы сохранения импульса и энергии связаны со свойствами однородности пространства-времени. Третий важный закон сохранения получается, если пространство **изотропно**, то есть если повороты на произвольный угол вокруг произвольной оси не изменяют потенциальную энергию системы.

Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из N материальных точек. Потенциальная энергия этой системы является функцией координат материальных точек:

$$U = U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (9.1)$$

Произведем теперь бесконечно малый поворот системы и потребуем, чтобы ее потенциальная энергия оставалась при этом неизменной. Для этого введем вектор бесконечно малого поворота $\delta\boldsymbol{\varphi}$, величина которого равна углу $\delta\varphi$ поворота, а направление совпадает с осью поворота (причем так, что направление поворота отвечает правилу винта по отношению к направлению $\delta\boldsymbol{\varphi}$).

При таком повороте каждая материальная точка системы, характеризуемая радиус-вектором \mathbf{r}_a , сместится на величину:

$$\delta\mathbf{r}_a = [\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a]. \quad (9.2)$$

В результате потенциальная энергия получит приращение

$$\delta U = \sum_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot \delta\mathbf{r}_a = \sum_a \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} \cdot [\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a]. \quad (9.3)$$

Но в соответствии со вторым законом Ньютона производная $\partial U / \partial \mathbf{r}_a$ равна

$$\dot{\mathbf{p}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a}. \quad (9.4)$$

Следовательно,

$$\delta U = -\sum_a \dot{\mathbf{p}}_a \cdot [\delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_a]. \quad (9.5)$$

Произведем в этом равенстве циклическую перестановку векторов, при которой векторное произведение не изменяется:

$$\mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = \mathbf{C} \cdot [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot [\mathbf{C} \times \mathbf{A}] \quad (9.6)$$

(что выражает неизменность объема параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C}). В результате этой перестановки, вынося $\delta\boldsymbol{\varphi}$ за знак суммы, имеем

$$\delta U = -\sum_a \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot [\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a] = -\delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_a [\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a]. \quad (9.7)$$

Это изменение потенциальной энергии должно быть равно нулю при любом $\delta\boldsymbol{\varphi}$ в силу изотропии пространства. Следовательно,

$$\sum_a [\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a] = 0. \quad (9.8)$$

Прибавим к этому равенству очевидное соотношение

$$\sum_a [\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a] = 0 \quad (9.9)$$

(поскольку $\dot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{v}_a$, а $\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}_a$, то $[\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a] = m_a [\mathbf{v}_a \times \mathbf{v}_a] = 0$ как векторное произведение двух коллинеарных векторов). В результате

$$\sum_a ([\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a] + [\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a]) = 0. \quad (9.10)$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, представляет собой полную производную по времени от векторного произведения $[\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a]$:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = [\dot{\mathbf{r}}_a \times \mathbf{p}_a] + [\mathbf{r}_a \times \dot{\mathbf{p}}_a]. \quad (9.11)$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] \right) = 0. \quad (9.12)$$

Поэтому для замкнутой системы величина

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = \text{const} \quad (9.13)$$

остаётся постоянной в процессе движения. Она называется **моментом импульса**¹ системы и представляет собой аксиальный вектор. Как следует из его определения, момент импульса — величина аддитивная, что означает, что момент импульса системы равен сумме моментов импульсов составляющих ее материальных точек. Так же как и в случае импульса, аддитивность этой величины на зависит от наличия или отсутствия взаимодействия между частицами.

В результате у замкнутой системы при движении сохраняются следующие величины: энергия

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (9.14)$$

импульс

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a, \quad (9.15)$$

и момент импульса

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a]. \quad (9.16)$$

Поскольку в определение момента импульса входят радиус-векторы частиц, то его значение, вообще говоря, зависит от выбора начала координат. Радиус-векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' одной и той же точки по отношению к началам, отстоящим на вектор \mathbf{b} , связаны соотношением $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{b}$. Поэтому имеем

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \times \mathbf{p}_a] = \sum_a [\mathbf{r}'_a \times \mathbf{p}_a] + [\mathbf{b} \times \sum_a \mathbf{p}_a], \quad (9.17)$$

или

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{b} \times \mathbf{P}], \quad (9.18)$$

где $\mathbf{P} = \sum_a \mathbf{p}_a$ — суммарный импульс системы. Из этой формулы видно, что только в том случае, когда система как целое покоится (то есть когда $\mathbf{P} = 0$), ее момент импульса не зависит от выбора начала координат. На законе сохранения момента импульса эта неопределенность его значения, разумеется, не сказывается, так как у замкнутой системы импульс тоже сохраняется.

Хотя закон сохранения всех трех компонент момента импульса (относительно произвольного начала координат) справедлив только для замкнутой системы, в более ограниченном виде этот закон может распространяться и на системы, находящиеся во внешнем силовом поле (гравитационном, электромагнитном). Из приведенного выше вывода видно, что всегда сохраняется проекция момента на такую ось, относительно которой данное поле симметрично, и поэтому механические свойства системы не изменяются при любом повороте вокруг этой оси; при этом, конечно, момент должен быть определен относительно какой-нибудь точки (начала координат), лежащей на этой оси.

Наиболее важным случаем такого рода является поле с **центральной симметрией**, то есть поле, в котором потенциальная энергия зависит только от расстояния до некоторой определенной точки (центра) в пространстве. Очевидно, что при движении в таком поле сохраняется проекция момента на любую ось, проходящую через центр. Другими словами, сохраняется вектор \mathbf{M} момента, определенного не относительно произвольной точки пространства, а относительно центра поля (пример — движение планеты в поле силы тяжести Солнца).

Другой пример — поле, обладающее **цилиндрической симметрией** относительно оси z , в котором сохраняется проекция момента M_z , причем, как уже было сказано, начало координат должно быть выбрано на оси симметрии.

Если имеется однородное поле вдоль оси z , то и здесь сохраняется величина M_z , но начало координат уже может быть выбрано произвольным образом. В конкретной задаче это может быть, например, однородное магнитное или электрическое поле.

¹Ее также называют **механическим моментом**. В англоязычной литературе она называется **угловым моментом**.

Закон сохранения момента количества движения и третий закон Ньютона

Рассмотрим замкнутую систему, которая состоит из двух материальных точек, взаимодействующих друг с другом силами \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{21} . Согласно третьему закону Ньютона, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, а из закона сохранения момента импульса следует соотношение

$$[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2] = \text{const.} \quad (9.19)$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$[\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2] = 0 \quad (9.20)$$

или, воспользовавшись вторым законом Ньютона, получим

$$[\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12}] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21}] = 0. \quad (9.21)$$

Так как $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, то

$$[(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12}] = 0. \quad (9.22)$$

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и \mathbf{F}_{12} коллинеарны. Коллинеарны также векторы $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и \mathbf{F}_{21} . Это значит, что силы \mathbf{F}_{12} и \mathbf{F}_{21} направлены вдоль прямой, соединяющей две взаимодействующие материальные точки. Вместе с равенством сил $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ это как раз и составляет содержание третьего закона Ньютона.

Поэтому, обращая эти рассуждения, мы приходим к выводу, что можно было бы вывести закон сохранения момента импульса из второго и третьего законов Ньютона. Но при этом связь этого закона сохранения с изотропией пространства не была бы столь очевидной.

Движение в центральном поле

Рассмотрим задачу об относительном движении двух взаимодействующих частиц, которая допускает полное решение в общем виде, — **задачу двух тел**. Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит лишь от расстояния между ними, то есть от абсолютной величины разности их радиус-векторов. Энергия такой системы может быть представлена в виде

$$E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (9.23)$$

Введем вектор взаимного расстояния обеих точек

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (9.24)$$

и поместим начало координат в центр инерции, что дает

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0. \quad (9.25)$$

Из двух последних равенств находим

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \quad (9.26)$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получаем

$$\mathbf{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, \quad (9.27)$$

где $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — относительная скорость движения двух материальных точек. Кинетическая энергия равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = \frac{1}{2} m v^2, \end{aligned} \quad (9.28)$$

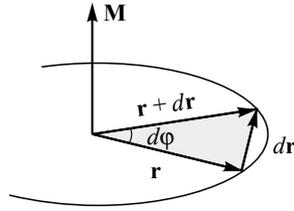


Рис. 9.1. Связь момента с секториальной скоростью.

где мы ввели обозначение

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.29)$$

Величина m называется **приведенной массой**. В результате в системе центра инерции полная энергия равна

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + U(r). \quad (9.30)$$

Таким образом, задача двух тел свелась к движению одной материальной точки с приведенной массой в **центральной** поле $U(r)$. Центральным называется поле, потенциальная энергия которого зависит лишь от расстояния до определенной неподвижной точки.

Как мы уже говорили, при движении в центральном поле сохраняется момент импульса относительно центра поля. Для одной частицы

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}]. \quad (9.31)$$

Поскольку векторы \mathbf{M} и \mathbf{r} взаимно перпендикулярны, постоянство момента (в данном случае по направлению) означает, что при движении частицы ее радиус-вектор \mathbf{r} все время остается в одной плоскости, перпендикулярной к вектору \mathbf{M} .

При движении одной материальной точки закон сохранения момента импульса имеет простой геометрический смысл. Введем вектор $d\mathbf{s}$, величина которого равна площади, описываемой радиус-вектором частицы \mathbf{r} за время dt (перемещение при этом равно $d\mathbf{r}$), а направление совпадает с нормалью к плоскости движения². Тогда, как следует из рис. 9.1,

$$d\mathbf{s} = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r})] = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}]. \quad (9.32)$$

Поделив это равенство на dt , имеем

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] = \frac{1}{2m} [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \frac{\mathbf{M}}{2m}, \quad (9.33)$$

или

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{M}. \quad (9.34)$$

Величина $\dot{\mathbf{s}} = d\mathbf{s}/dt$ определяет площадь, описываемую радиус вектором частицы в единицу времени. Она называется **секториальной скоростью**. Таким образом, сохранение момента означает постоянство секториальной скорости, то есть

при движении в центральном поле за равные промежутки времени радиус-вектор движущейся точки описывает равные площади.

Это есть так называемый второй закон Кеплера, 1609 г. .

Секториальную скорость можно выразить через скорость изменения угла φ со временем. Для этого разложим вектор $d\mathbf{r}$ на две компоненты, параллельную и перпендикулярную вектору \mathbf{r} , $d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_{\parallel} + d\mathbf{r}_{\perp}$. Тогда

$$d\mathbf{s} = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}] = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times (d\mathbf{r}_{\parallel} + d\mathbf{r}_{\perp})]. \quad (9.35)$$

Поскольку $[\mathbf{r} \times d\mathbf{r}_{\parallel}] = 0$, а $d\mathbf{r}_{\perp} = [d\varphi \times \mathbf{r}]$, то

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} &= \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times d\mathbf{r}_{\perp}] = \frac{1}{2} [\mathbf{r} \times [d\varphi \times \mathbf{r}]] = \\ &= \frac{1}{2} d\varphi r^2 - \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{r} (d\varphi \cdot \mathbf{r})}_{=0} = \frac{1}{2} r^2 d\varphi, \end{aligned} \quad (9.36)$$

²Направление нормали выбирается так, чтобы вектора \mathbf{r} , $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{s}$ образовывали правую тройку (правило буравчика).

поэтому

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2m} \mathbf{M}. \quad (9.37)$$

Следовательно,

$$\mathbf{M} = mr^2 \dot{\varphi}. \quad (9.38)$$

Полное решение задачи о движении в центральном поле проще всего получить исходя из законов сохранения энергии и момента, не выписывая при этом самих уравнений движения. При этом нам будет удобно пользоваться не декартовыми координатами x и y в плоскости, в которой происходит движение, а так называемыми **полярными координатами**, в которых положение материальной точки задается координатами r и φ (рис. 9.2).

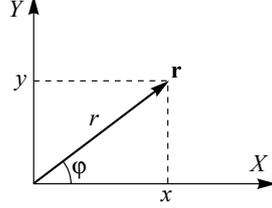


Рис. 9.2. Полярные координаты.

Потенциальная энергия зависит лишь от координаты r , так что ее преобразовывать не нужно. Кинетическая энергия определяется квадратом скорости частицы. В декартовых координатах

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \\ &= \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{(dt)^2} \equiv \frac{(dl)^2}{(dt)^2}. \end{aligned} \quad (9.39)$$

Нам надо преобразовать эту величину к полярным координатам. Из рис. 9.3 следует, что квадрат элемента длины в полярных координатах равен $(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$, поэтому

$$v^2 = \frac{(dl)^2}{(dt)^2} = \frac{(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2}{(dt)^2} = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \quad (9.40)$$

В результате полную энергию системы можно представить в виде

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv^2}{2} + U(r) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + U(r) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r). \end{aligned} \quad (9.41)$$

Но производная $d\varphi/dt$ связана с сохраняющейся величиной момента $M_z = M = mr^2 d\varphi/dt$. Поэтому, подставляя в выражение для энергии

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}, \quad (9.42)$$

получим

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \quad (9.43)$$

Отсюда можно выразить радиальную скорость частицы

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right]}. \quad (9.44)$$

Это есть дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для определения функции $r(t)$. Интегрируя, получим

$$\int \frac{dr}{\pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right]}} = \int dt + \text{const}. \quad (9.45)$$

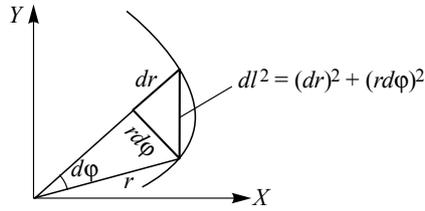


Рис. 9.3. Элемент длины в полярных координатах.

Таким образом, если мы сумеем вычислить интеграл, мы найдем связь r с t , а потом из закона сохранения момента импульса можно будет найти зависимость φ от t :

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt, \quad (9.46)$$

или

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right]}} + \text{const.} \quad (9.47)$$

Это есть уравнение траектории частицы в полярных координатах.

Выражение для энергии показывает, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с “эффективной” потенциальной энергией

$$U(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (9.48)$$

Величину $M^2/2mr^2$ называют **центробежной энергией**.

Значения r , при которых

$$U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = E, \quad (9.49)$$

определяют границы области движения по расстоянию от центра. При выполнении этого равенства радиальная скорость \dot{r} обращается в нуль. Это не означает остановки частицы (как при истинном одномерном движении), так как угловая скорость $\dot{\varphi}$ нигде не обращается в нуль. Равенство $\dot{r} = 0$ описывает точку поворота траектории, в которой функция $r(t)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Задача Кеплера. Резерфордовское рассеяние

Важнейшим случаем центральных полей являются поля, в которых потенциальная энергия обратно пропорциональна r и, соответственно, силы обратно пропорциональны r^2 . Сюда относятся ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля. Первые, как известно, имеют характер притяжения, а вторые могут быть как полями притяжения, так и полями отталкивания.

Рассмотрим сначала поле притяжения

$$U = -\frac{\alpha}{r} \quad (U \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty), \quad (10.1)$$

где $\alpha = Gm_1m_2 > 0$ в случае гравитационного взаимодействия двух масс m_1 и m_2 . Тогда эффективная потенциальная энергия равна

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}, \quad (10.2)$$

где, напомним, m есть приведенная масса.

График этой функции изображен на рис. 10.1. При $r = M^2/m\alpha$ она имеет минимум, равный¹

$$(U)_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2M^2}. \quad (10.3)$$

Из характера зависимости $U(r)$ следует, что движение является финитным при $E < 0$ и инфинитным при $E > 0$ (см. рис. 10.2). Из рис. 10.2 также видно, что в центр поля ($r = 0$) невозможно попасть ни при какой энергии, что означает невозможность падения частицы на центр в этой задаче. Физическая причина — наличие центробежной энергии, которая при $r \rightarrow 0$ быстро возрастает пропорционально $1/r^2$.

Найдем теперь область движения по радиусу в случае финитного движения, то есть при $E < 0$. Для этого надо решить уравнение

$$U = E \quad \text{или} \quad -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} - E = 0. \quad (10.4)$$

Это уравнение квадратное относительно $1/r$. Его решение таково:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4E\frac{M^2}{2m}}}{2 \cdot \frac{M^2}{2m}} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}}{\frac{M^2}{m\alpha}}. \quad (10.5)$$

Введем обозначения

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (10.6)$$

¹Положение минимума определяется из условия равенства нулю производной $dU/dr = 0$.

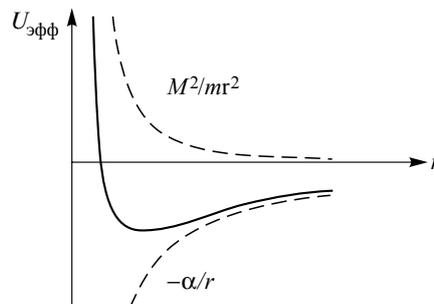


Рис. 10.1. Эффективная потенциальная энергия в кеплеровой задаче в поле притяжения.

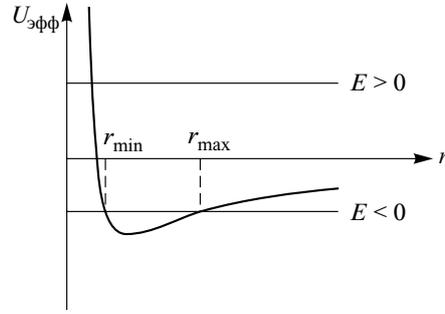


Рис. 10.2. Области финитного и инфинитного движения.

Заметим, что так как $E < 0$, то $\varepsilon < 1$! Пользуясь этими обозначениями, два корня квадратного уравнения можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \varepsilon}{p}. \quad (10.7)$$

Отсюда минимальное и максимальное удаление от центра поля равны

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad \text{и} \quad r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon}. \quad (10.8)$$

Случай $\varepsilon = 0$, очевидно, соответствует движению по окружности. Этому соответствует наименьшее допустимое значение энергии E , совпадающее с (10.3).

Найдем теперь траекторию, по которой движется частица. Одна из возможностей — это непосредственное вычисление интеграла

$$\varphi = \int \frac{\frac{M}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right]}} + \text{const} \quad (10.9)$$

с потенциальной энергией $U(r) = -\alpha/r$. Таким образом мы найдем зависимость $r(\varphi)$, то есть уравнение траектории, в полярных координатах. Однако здесь мы выберем другой путь, не связанный с утомительными вычислениями интегралов. Для этого сначала убедимся в том, что векторная величина

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v} \times \mathbf{M}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} \quad (10.10)$$

является интегралом движения в нашей задаче, то есть что она не изменяется со временем.

Для доказательства этого утверждения вычислим производную

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\dot{\mathbf{v}} \times \mathbf{M}] - \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \quad (10.11)$$

При получении последнего слагаемого мы воспользовались тем, что радиальная скорость \dot{r} может быть представлена в виде

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}), \quad (10.12)$$

то есть как проекция вектора скорости \mathbf{v} на направление радиус-вектора \mathbf{r} .

Подставим теперь в (10.11) выражение для момента количества движения $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times m\mathbf{v}]$ и раскроем двойное векторное произведение:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= [\dot{\mathbf{v}} \times [\mathbf{r} \times m\mathbf{v}]] - \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3} = \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot m\dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot m\dot{\mathbf{v}}) - \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Вместо $m\dot{\mathbf{v}}$ подставим величину силы:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (10.14)$$

В результате

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot (-\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3})) - \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot (-\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3})) - \frac{\alpha \mathbf{v}}{r} + \frac{\alpha \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})}{r^3}. \quad (10.15)$$

Легко видеть, что первый и последний, а также второй и третий члены в этом выражении попарно сокращаются, и в результате

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \mathbf{A} = \text{const}, \quad (10.16)$$

что и требовалось доказать.

Выберем теперь направление постоянного вектора \mathbf{A} в качестве оси X нашей полярной системы координат и обозначим угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{A} через φ (рис. 10.3). Умножим равенство (10.10) скалярно на \mathbf{r} :

$$Ar \cos \varphi = \mathbf{r} \cdot [\mathbf{v} \times \mathbf{M}] - \alpha r. \quad (10.17)$$

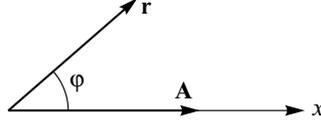


Рис. 10.3. Выбор полярной системы координат.

В смешанном произведении циклически переставим сомножители:

$$Ar \cos \varphi = \mathbf{M} \cdot \underbrace{[\mathbf{r} \times \mathbf{v}]}_{\mathbf{M}/m} - \alpha r, \quad (10.18)$$

или

$$Ar \cos \varphi = \frac{M^2}{m} - \alpha r. \quad (10.19)$$

Разрешая это уравнение относительно r , получаем

$$r = \frac{M^2/m}{A \cos \varphi + \alpha} = \frac{M^2/m\alpha}{1 + \frac{A}{\alpha} \cos \varphi}. \quad (10.20)$$

Поскольку A и α у нас положительны, минимальному r (так называемому **перигелию** орбиты) соответствует $\varphi = 0$. Кроме того, согласно (10.6), $M^2/m\alpha = p$, поэтому

$$r_{\min} = \frac{p}{1 + \frac{A}{\alpha}}. \quad (10.21)$$

Сравнивая это выражение с (10.8), получаем

$$\frac{A}{\alpha} = \varepsilon, \quad \text{или} \quad A = \alpha\varepsilon = \alpha\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (10.22)$$

В результате уравнение траектории частицы в полярной системе координат принимает следующий вид:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (10.23)$$

При $\varepsilon < 1$ это есть уравнение эллипса, p — параметр эллипса, ε — эксцентриситет. Частным случаем эллипса является окружность, когда $\varepsilon = 0$. Как мы покажем ниже, сохраняющийся вектор \mathbf{A} направлен вдоль большой оси эллипса от фокуса к перигелию. Его постоянство означает неизменность ориентации большой оси эллипса в процессе движения частицы. Часто за определение эллипса принимают такое **эллипс — это геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух заданных точек A и B (фокусов эллипса) есть величина постоянная:**

$$r_1 + r_2 = L = \text{const} \quad (10.24)$$

(смотри рис. 10.4).

Покажем, что из этого определения следует соотношение (10.23). Для этого выберем начало координат в точке B — фокусе эллипса. Из рис. 10.5 следует, что

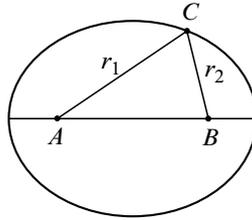


Рис. 10.4. Каноническое определение эллипса.

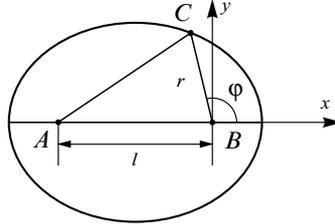


Рис. 10.5. Привязка к осям полярной системы координат.

$$AB = l, \quad BC = r, \quad AC = \sqrt{(l + r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2}, \quad (10.25)$$

при этом мы воспользовались известной формулой для расстояния между двумя точками:

$$r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Поскольку роль r_1 и r_2 играют соответственно AC и BC , то условие $r_1 + r_2 = L = \text{const}$ можно переписать в виде

$$r + \sqrt{(l + r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2} = L, \quad (10.26)$$

или

$$\sqrt{l^2 + 2lr \cos \varphi + r^2} = L - r. \quad (10.27)$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и сокращая на r^2 , получаем

$$l^2 + 2lr \cos \varphi = L^2 - 2Lr. \quad (10.28)$$

Переписывая это выражение в виде

$$L^2 - l^2 = 2r(L + l \cos \varphi), \quad (10.29)$$

или

$$\underbrace{\frac{L^2 - l^2}{2L}}_p = r \left(1 + \underbrace{\frac{l}{L} \cos \varphi}_\varepsilon \right), \quad (10.30)$$

мы приходим к соотношению (10.23), где эксцентриситет ε и параметр эллипса p равны

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \quad \text{и} \quad p = \frac{L^2 - l^2}{2L} = \frac{L}{2}(1 - \varepsilon^2). \quad (10.31)$$

Отсюда следует, что

$$L = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}. \quad (10.32)$$

Каноническое уравнение эллипса в декартовой системе координат имеет вид

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (10.33)$$

где a — большая полуось, b — малая. Таким образом, как видно из рис. 10.6, $2a = L$. Из того же рисунка также следует, что малая полуось эллипса b равна

$$b = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{L}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (10.34)$$

В результате мы получили полезные выражения для большой и малой полуосей эллипса через его параметр p и эксцентриситет ε :

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (10.35)$$

Период движения частицы по орбите проще всего определить с помощью закона сохранения момента в форме интеграла площадей:

$$\dot{s} = \frac{1}{2m} \mathbf{M}. \quad (10.36)$$

Интегрируя это равенство по времени, получим

$$2ms = M \cdot T, \quad (10.37)$$

где T — период обращения. Площадь эллипса равна $s = \pi ab$, поэтому, учитывая (10.35), получаем

$$MT = 2\pi m \cdot \frac{\alpha}{2|E|} \cdot \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \quad (10.38)$$

Отсюда, сокращая на M , получаем окончательно

$$T = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}. \quad (10.39)$$

Таким образом, период обращения по орбите зависит только от полной энергии частицы.

Из (10.35) и (10.39) следует, что при движении в центральном поле, создаваемом тяжелой гравитирующей массой, отношение

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 \alpha^2 m / 2|E|^3}{\alpha^3 / 8|E|^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} \quad (10.40)$$

не зависит от параметров движения и массы частицы², то есть определяется только параметрами силового поля, в котором движется частица. Это составляет суть **третьего закона Кеплера**, согласно которому квадраты времен обращения планет относятся, как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

К этому же результату можно прийти, и не выписывая в явном виде решение уравнений движения, а используя другой подход, называемый **методом механического подобия**. Запишем уравнение движения планеты в общем виде

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\alpha}{r^3} \mathbf{r} \quad (10.41)$$

и произведем масштабное преобразование координат и времени

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \gamma \mathbf{r}', \\ t &\rightarrow \beta t'. \end{aligned} \quad (10.42)$$

Тогда в новых переменных уравнение (10.41) примет вид

$$\frac{\gamma}{\beta^2} m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{(dt')^2} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\alpha \mathbf{r}'}{(r')^3}. \quad (10.43)$$

²В этом случае приведенная масса и масса частицы примерно равны и $\alpha \propto m$.

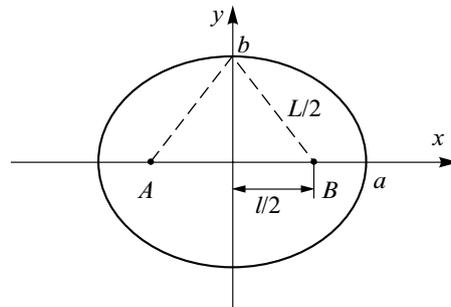


Рис. 10.6. Уравнение эллипса в декартовой системе координат.

Отсюда следует, что если

$$\frac{\gamma}{\beta^2} = \frac{1}{\gamma^2}, \quad \text{или} \quad \gamma^3 = \beta^2, \quad (10.44)$$

то уравнение движения в новых переменных, имеет точно такой же вид как и в старых. Это означает, что если это уравнение допускает движение по какой-то траектории, то оно допускает движение и по геометрически подобной траектории, причем

$$\left(\frac{r}{r'}\right)^3 = \left(\frac{t}{t'}\right)^2, \quad (10.45)$$

то есть квадраты времен прохождения подобных участков траектории относятся, как кубы их линейных размеров. Это и есть третий закон Кеплера, который фактически является следствием того, что сила притяжения $\sim 1/r^2$.

Рассмотренный нами случай финитного движения по эллиптической орбите с уравнением траектории в виде

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad \text{где} \quad p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}, \quad (10.46)$$

выведенной для случая $E < 0$, можно обобщить и на случай инфинитного движения, когда $E \geq 0$, при этом все три записанные формулы остаются справедливыми. Так, случаю $E > 0$ ($\varepsilon > 1$) отвечает движение по гиперболе (см. рис. 10.7). Расстояние от перигелия до центра поля равно $r_{\min} = p/(1+\varepsilon)$. Случаю $E = 0$ ($\varepsilon = 1$) отвечает движение по параболе с расстоянием перигелия $r_{\min} = p/2$. Этот

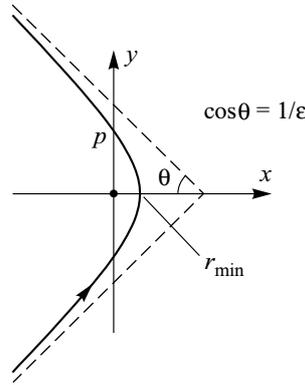


Рис. 10.7. Движение по гиперболе в поле притяжения.

случай имеет место, когда частица начинает свое движение из состояния покоя на бесконечности.

Почему сгорают метеориты? Для ответа на этот вопрос воспользуемся принципом механического подобия. Выпишем выражение для полной энергии частицы, приняв во внимание, что $\gamma^2/\beta^2 = 1/\gamma$:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 \frac{m(v')^2}{2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\alpha}{r'} = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2 E', \quad (10.47)$$

или, поскольку отношение γ^2/β^2 равно отношению скоростей для геометрически подобных орбит,

$$\left|\frac{E}{E'}\right| = \left(\frac{v}{v'}\right)^2. \quad (10.48)$$

Когда метеорит тормозится в атмосфере, его полная энергия уменьшается и в некий момент из положительной становится отрицательной и продолжает уменьшаться дальше благодаря трению об атмосферу (но увеличивается при этом по абсолютной величине). Скорость при этом растет. Трение становится еще больше и т.д. Метеорит сильно нагревается в результате трения и сгорает.

Резерфордское рассеяние

Рассмотрим теперь движение в поле отталкивания, в котором

$$U = \frac{\alpha}{r}, \quad (10.49)$$

где $\alpha > 0$. Например, это может быть движение одного заряда q_1 в поле одноименного заряда q_2 , тогда $\alpha = q_1 q_2$. В этом случае эффективная потенциальная энергия

$$U = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (10.50)$$

является монотонно убывающей функцией r (рис. 10.8). Полная энергия частицы E может быть только положительной, и движение всегда является инфинитным.

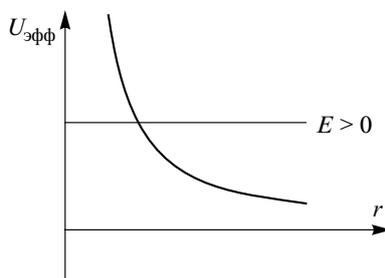


Рис. 10.8. Эффективная потенциальная энергия в кеплеровой задаче в поле отталкивания.

Траектория частицы может быть получена тем же самым способом, что и при движении в поле притяжения. Для этого в формуле (10.20) нужно произвести замену $\alpha \rightarrow -\alpha$. В результате траектория частицы задается уравнением

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos \varphi - 1}, \quad \text{где } p = \frac{M^2}{m\alpha} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}} \quad (10.51)$$

(с $\alpha > 0$) и является по-прежнему гиперболой. Центр поля лежит, однако, снаружи гиперболы (рис. 10.9).

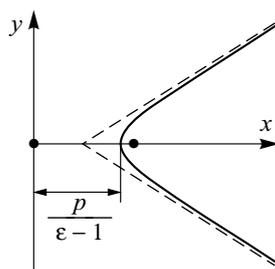


Рис. 10.9. Движение по гиперболе в поле отталкивания.

Задачу о движении частицы в этом случае часто формулируют как **задачу рассеяния**. Частица при своем движении отклоняется от первоначального направления на угол χ . При этом, как следует из

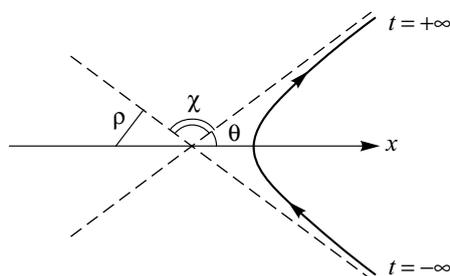


Рис. 10.10. Задача рассеяния в кулоновском поле отталкивания.

рис. 10.10, угол отклонения (угол рассеяния) χ связан с углом θ , под которым наклонены асимптоты гиперболы к оси X , простым соотношением

$$\chi + 2\theta = \pi, \quad (10.52)$$

поэтому

$$\text{ctg } \frac{\chi}{2} = \text{tg } \theta. \quad (10.53)$$

С другой стороны, угол θ определяется из условия обращения в ∞ величины r в формуле (10.51). Отсюда следует, что

$$\cos \theta = \frac{1}{\varepsilon} \quad (10.54)$$

и

$$\operatorname{ctg} \frac{\chi}{2} = \operatorname{tg} \theta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \sqrt{\frac{2EM^2}{m\alpha^2}}. \quad (10.55)$$

Энергия E и момент импульса M определяются из движения частицы при $t = -\infty$:

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} \quad \text{и} \quad M = \rho mv_\infty, \quad (10.56)$$

где v_∞ — скорость налетающей частицы на бесконечности, а ρ — так называемое **прицельное расстояние**. Подставляя эти величины в формулу (10.55), мы приходим к знаменитой формуле Резерфорда

$$\rho = \frac{\alpha}{mv_\infty^2} \operatorname{ctg} \frac{\chi}{2}, \quad (10.57)$$

связывающей угол рассеяния χ с прицельным расстоянием ρ . Замечательно, что точно такая же формула получается и при движении частицы в поле притяжения $U = -\alpha/r$.

Движение твердого тела. Тензор инерции и энергия вращающегося твердого тела

Мы приступаем теперь к описанию движения **твердого тела** (не одной, а многих материальных точек). Что такое твердое тело? В механике твердое тело определяется как **система материальных точек, расстояния между которыми в процессе движения неизменны** (то есть мы не учитываем деформации).

Для описания движения твердого тела введем две системы координат. Одна — “неподвижная”, инерциальная система координат XYZ (например наша лаборатория). Другая — движущаяся, $x_1 = x$, $x_2 = y$ и $x_3 = z$, жестко связанная с твердым телом и участвующая во всех его движениях. Как мы увидим впоследствии, начало движущейся системы координат удобно совместить с центром инерции тела.

Поскольку движущаяся система жестко связана с твердым телом, то положение твердого тела относительно неподвижной системы координат однозначно определяется заданием положения движущейся системы (ее начала координат и ориентации осей). Пусть радиус-вектор \mathbf{R} указывает положение

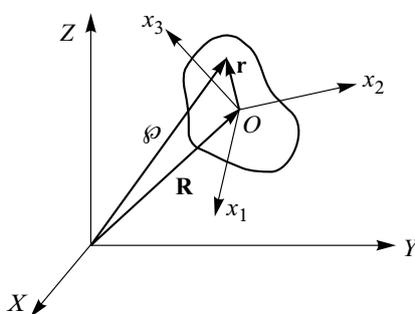


Рис. 11.1. Две системы координат.

ние начала O движущейся системы (рис. 11.1). Ориентация осей этой системы x_1, x_2 и x_3 относительно неподвижной определяется тремя независимыми углами. В итоге вместе с тремя компонентами вектора \mathbf{R} мы имеем всего шесть координат. Таким образом,

всякое твердое тело представляет собой механическую систему с шестью степенями свободы.

Рассмотрим теперь произвольное бесконечно малое перемещение твердого тела. Его можно себе представить в виде суммы двух частей. Одна часть — это бесконечно малый параллельный перенос тела (когда **все** точки тела смещаются одинаково). В результате этого центр инерции (начало координат подвижной системы!) переходит из начального положения в конечное при неизменной ориентации осей подвижной системы координат. Вторая — бесконечно малый поворот вокруг центра инерции, в результате которого твердое тело переходит в конечное положение (порядок этих двух операций, очевидно, неважен).

Обозначим радиус-вектор произвольной точки твердого тела P в подвижной системе координат посредством \mathbf{r} , а радиус-вектор той же точки в неподвижной системе — посредством $\boldsymbol{\varphi}$. Тогда бесконечно малое смещение $d\boldsymbol{\varphi}$ точки P складывается из перемещения $d\mathbf{R}$ центра инерции и перемещения $[d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}]$ относительно последнего при повороте на бесконечно малый угол $d\boldsymbol{\varphi}$ вокруг точки O :

$$d\boldsymbol{\varphi} = d\mathbf{R} + [d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}]. \quad (11.1)$$

Разделив это равенство на интервал времени dt , в течение которого произошло данное перемещение, и введя скорости

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\Omega}, \quad (11.2)$$

получим соотношение между ними

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]. \quad (11.3)$$

Скорость \mathbf{V} — это скорость движения центра инерции твердого тела. Ее называют также скоростью **поступательного** движения твердого тела. Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ называется **угловой скоростью** вращения твердого тела. Его направление и направление $d\varphi$ совпадают с направлением оси вращения в данный момент времени. Таким образом, скорость \mathbf{v} любой точки тела (относительно неподвижной системы координат) может быть выражена через поступательную скорость тела \mathbf{V} и угловую скорость его вращения $\boldsymbol{\Omega}$.

Тензор инерции

Для вычисления кинетической энергии твердого тела представим его как дискретную систему материальных точек. Тогда

$$T = \frac{mv^2}{2}, \quad (11.4)$$

где суммирование производится по всем точкам, составляющим тело. Чтобы избежать громоздких обозначений, здесь и ниже мы опускаем индексы, нумерующие эти точки. Переход от формул, содержащих суммирование по дискретным точкам, к формулам для сплошного тела осуществляется просто заменой масс частиц на массу ρdV , заключенную в элементе объема dV (ρ — плотность массы), и интегрированием по всему объему тела V .

Подставим в формулу для кинетической энергии $T = mv^2/2$ формулу для скорости $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$:

$$T = \frac{m}{2} (\mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}])^2 = \frac{m}{2} V^2 + m\mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] + \frac{m}{2} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2. \quad (11.5)$$

Скорости \mathbf{V} и $\boldsymbol{\Omega}$ одинаковы для всех точек твердого тела в данный момент времени. Поэтому в первом члене $V^2/2$ можно вынести за знак суммы, а сумма m есть масса тела, которую мы будем обозначать через M . Во втором члене пишем

$$m\mathbf{V} \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] = m\mathbf{r} \cdot [\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}] = [\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}] \cdot m\mathbf{r}. \quad (11.6)$$

Отсюда видно, что если начало O движущейся системы координат выбрано, как условлено, в центре инерции тела, то этот член обращается в нуль, так как тогда $m\mathbf{r} = 0$. Наконец, в третьем члене раскрываем квадрат векторного произведения:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]^2 &= [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] \cdot [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}] = \boldsymbol{\Omega} \cdot [\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]] = \\ &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} r^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2. \end{aligned} \quad (11.7)$$

В результате находим

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} m \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2. \quad (11.8)$$

Таким образом, кинетическую энергию твердого тела можно представить в виде суммы двух частей. Первый член в (11.8) — это кинетическая энергия поступательного движения. Она имеет такой вид, как если бы вся масса тела M была сосредоточена в его центре инерции. Второй член — это кинетическая энергия вращательного движения с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ вокруг оси, проходящей через центр инерции. Необходимо подчеркнуть, что возможность такого разделения кинетической энергии на две независимые части обусловлена выбором начала подвижной системы координат в центре инерции тела.

Как мы уже говорили, угловая скорость вращения $\boldsymbol{\Omega}$ одинакова для всех точек тела, и поэтому ее можно было бы вынести за знак суммы и во втором члене (11.8), описывающем кинетическую энергию вращательного движения:

$$T_p = \frac{1}{2} m \Omega^2 r^2 - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2. \quad (11.9)$$

Однако если это просто сделать для первого слагаемого, то для второго это не так очевидно. Проблему решает переход к **тензорным обозначениям**. Запишем

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \Omega_i \Omega_i \equiv \Omega_i^2, \\ r^2 &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x_l x_l \equiv x_l^2, \\ (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})^2 &= (\Omega_i x_i)(\Omega_k x_k) = \Omega_i \Omega_k x_i x_k, \end{aligned} \quad (11.10)$$

поэтому

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \} = \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k \} = \\ &= \frac{1}{2} \Omega_i \Omega_k \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k). \end{aligned} \quad (11.11)$$

Здесь было использовано тождество $\Omega_i = \delta_{ik} \Omega_k$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Вводя обозначение

$$I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k), \quad (11.12)$$

получим окончательное выражение для кинетической энергии твердого тела

$$T = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k. \quad (11.13)$$

Введенная нами совокупность девяти величин $I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$ зависит от геометрии твердого тела, а точнее от распределения масс, и называется **тензором моментов инерции**, или просто **тензором инерции** тела. Здесь мы должны немного отвлечься и поговорить о том, что такое **тензор** вообще. Как мы покажем ниже, понятие тензора есть обобщение понятия вектора. Всего, как мы видим, в общем случае у тензора I_{ik} имеется девять компонент. Однако поскольку этот тензор **симметричен**, то есть

$$I_{ik} = I_{ki}, \quad (11.14)$$

то независимых компонент всего шесть. Записывают компоненты тензора обычно в виде следующей таблицы:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \quad (11.15)$$

Самое важное, что хотелось бы здесь отметить, — это то, что, по аналогии с вектором, компоненты которого зависят от выбора системы координат, компоненты тензора I_{ik} тоже зависят от выбора системы координат.

Как известно, при повороте системы координат компоненты радиус-вектора (и вообще любого другого вектора) преобразуются по закону

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k, \quad (11.16)$$

где $\alpha_{ik} = \cos(\widehat{ik'})$ — матрица направляющих косинусов, или, как мы ее называем, матрица поворота. Пользуясь этим соотношением, найдем связь между компонентами тензора в старой и в новой системах координат. Подставим для этого (11.16) в выражение для тензора инерции (11.12):

$$I_{ik} = \sum m \underbrace{(\alpha_{lm} x'_m)}_{x_i} \underbrace{(\alpha_{ln} x'_n)}_{x_i} \delta_{ik} - \underbrace{(\alpha_{ip} x'_p)}_{x_i} \underbrace{(\alpha_{ks} x'_s)}_{x_k}. \quad (11.17)$$

Замечаем, что в первом слагаемом $\alpha_{lm} \alpha_{ln} = \delta_{mn}$ (ортогональность столбцов матрицы поворота), а символ Кронекера (пользуясь ортогональностью строк) можно переписать в виде

$$\delta_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{kp} = \alpha_{ip} \alpha_{ks} \delta_{ps} \quad (\text{ортогональность строк}). \quad (11.18)$$

Используя все это вместе, получим

$$\begin{aligned} I_{ik} &= \sum m (\delta_{mn} x'_m x'_n \alpha_{ip} \alpha_{ks} \delta_{ps} - \alpha_{ip} \alpha_{ks} x'_p x'_s) = \\ &= \alpha_{ip} \alpha_{ks} \sum m [(x'_n)^2 \delta_{ps} - x'_p x'_s] = \alpha_{ip} \alpha_{ks} I'_{ps}, \end{aligned} \quad (11.19)$$

где

$$I'_{ik} = \sum m [(x'_i)^2 \delta_{ik} - x'_i x'_k] \quad (11.20)$$

представляют собой компоненты тензора в новой (повернутой) системе координат.

Таким образом, мы пришли к выводу, что при повороте системы координат девять величин I_{ik} преобразуются по закону

$$I_{ik} = \alpha_{ip} \alpha_{ks} I'_{ps}. \quad (11.21)$$

Этот закон преобразования совпадает с законом преобразования произведения двух компонент вектора

$$\begin{aligned}x_i &= \alpha_{ip}x'_p, \\x_k &= \alpha_{ks}x'_s, \\x_ix_k &= \alpha_{ip}\alpha_{ks}x'_p x'_s.\end{aligned}\tag{11.22}$$

В математике

величина, которая при повороте системы координат преобразуется как произведение двух компонент вектора, называется **тензором второго ранга**.

Таким образом, тензор инерции является симметричным тензором второго ранга. По аналогии можно ввести тензоры более высоких рангов. Вектор также можно называть **тензором первого ранга**.

Выпишем для наглядности компоненты тензора инерции в явном виде:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) - \sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) - \sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.\tag{11.23}$$

Компоненты I_{xx} , I_{yy} и I_{zz} иногда называют моментами инерции тела относительно соответствующих осей. Заметим, что тензор инерции аддитивен — моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей.

Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то в определении тензора I_{ik} (см. (11.12)) сумма заменяется интегралом по объему тела:

$$I_{ik} = \int \rho(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV.\tag{11.24}$$

Как мы уже сказали, конкретный вид тензора моментов инерции зависит от выбора системы координат. В математике доказывается теорема, которая гласит, что

всякий симметричный тензор второго ранга может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направления осей x_1 , x_2 и x_3 .

Эти направления называют **главными осями инерции**, а соответствующие значения компонент тензора — **главными моментами инерции**. Обозначим их как I_1 , I_2 и I_3 . При таком выборе осей x_1 , x_2 и x_3 тензор I_{ik} имеет вид

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}\tag{11.25}$$

и кинетическая энергия вращательного движения выражается особенно просто:

$$T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2).\tag{11.26}$$

Отметим, что каждый из трех главных моментов инерции не может быть больше суммы двух других. Так,

$$\begin{aligned}I_1 + I_2 &= \sum m(x_2^2 + x_3^2 + x_1^2 + x_3^2) = \\ &= \sum m(x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2) \geq \sum m(x_1^2 + x_2^2) = I_3.\end{aligned}\tag{11.27}$$

Тело, у которого все три главных момента инерции различны, называют **асимметрическим волчком**. Если два главных момента инерции равны друг другу, например $I_1 = I_2 \neq I_3$, то твердое тело называют **симметрическим волчком**. В этом случае выбор направления главных осей в плоскости x_1x_2 произволен (пример симметрического волчка — любое тело вращения, например юла). Если же все три главных момента инерции совпадают, то тело называется **шаровым волчком**. В этом случае произволен выбор всех трех главных осей инерции — в качестве них можно взять любые три взаимно перпендикулярные оси (проходящие через центр инерции тела)¹.

¹Шаровой волчок не обязательно имеет форму шара: например, однородное тело в форме куба — тоже шаровой волчок.

Нахождение главных осей инерции очень упрощается, если твердое тело обладает той или иной **симметрией**. Ясно, что положение центра инерции и направление главных осей инерции должны обладать той же самой симметрией.

Так, если тело обладает **плоскостью симметрии**, то центр инерции должен лежать в этой плоскости. В ней же лежат две главные оси инерции, а третья — перпендикулярна к ней. Очевидным примером такого сорта является система частиц, расположенных в одной плоскости. В этом случае имеется простое соотношение между тремя главными моментами инерции. Так, если плоскость системы выбрана в качестве плоскости x_1x_2 , то, поскольку для всех частиц $x_3 = 0$, имеем

$$I_1 = \sum m x_2^2, \quad I_2 = \sum m x_1^2, \quad I_3 = \sum m(x_1^2 + x_2^2), \quad (11.28)$$

так что в результате

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (11.29)$$

Говорят, что тело обладает **осью симметрии** n -го порядка, если оно совмещается само с собой при повороте на угол $2\pi/n$ вокруг этой оси. Ясно, что если тело обладает осью симметрии какого-либо порядка ($n \neq 1$), то центр инерции лежит на этой оси. С ней же совпадает одна из главных осей инерции, а две другие — перпендикулярны к ней. При этом если порядок оси симметрии выше второго ($n = 3, 4, \dots$), то тело является симметрическим волчком. Действительно, каждую главную ось (перпендикулярную к оси симметрии) можно тогда повернуть на угол, отличный от 180° . Другими словами, выбор этих осей становится неоднозначным, а это возможно лишь в случае симметрического волчка. Примером симметрического волчка (помимо тела вращения) является прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник.

Особым случаем, представляющим интерес, является система частиц, расположенных вдоль одной прямой линии. Если выбрать эту прямую в качестве оси x_3 , то для всех частиц $x_1 = x_2 = 0$, и поэтому два главных момента инерции совпадают, а третий равен нулю:

$$I_1 = I_2 = \sum m x_3^2, \quad I_3 = 0. \quad (11.30)$$

Такую систему называют **ротатором**. От общего случая произвольного тела его отличает то, что он имеет всего **две** (а не три) вращательные степени свободы, соответствующие вращениям вокруг осей x_1 и x_2 . Говорить же о вращении прямой вокруг самой себя, очевидно, не имеет смысла.

Иногда удобно вычислять тензор инерции относительно точки, не совпадающей с центром инерции тела. Тогда (см. рис. 11.2)

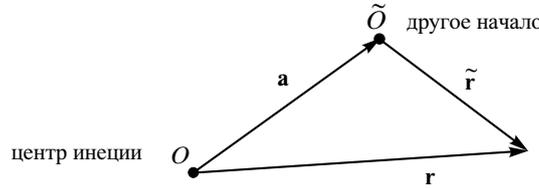


Рис. 11.2. Вычисление тензора инерции относительно другого начала.

$$\tilde{I}_{ik} = \sum m (\tilde{x}_l^2 \delta_{ik} - \tilde{x}_i \tilde{x}_k). \quad (11.31)$$

Поскольку $\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{a}$, или $x_i = \tilde{x}_i + a_i$, то, подставляя $\tilde{x}_i = x_i - a_i$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{ik} &= \sum m \{ (x_l - a_l)^2 \delta_{ik} - (x_i - a_i)(x_k - a_k) \} = \\ &= \sum m \{ (x_l^2 - 2x_l a_l + a_l^2) \delta_{ik} - x_i x_k + a_i x_k + a_k x_i - a_i a_k \} = \\ &= \sum m (x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) - 2\delta_{ik} a_l \sum m x_l + a_i \sum m x_k + a_k \sum m x_i + \\ &+ M(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Так как точка O — центр инерции тела, то $\sum m x_i = 0$, и в результате получаем

$$\tilde{I}_{ik} = I_{ik} + M(a^2 \delta_{ik} - a_i a_k). \quad (11.33)$$

С помощью этой формулы, зная \tilde{I}_{ik} , легко вычислить искомый тензор I_{ik} и наоборот. Частным случаем этой формулы является связь между моментами инерции тела относительно двух различных параллельных осей. Пусть одна из этих осей (ось C) проходит через центр инерции тела, а вторая

(ось A) — отстоит от нее на расстоянии a . Тогда, принимая направления этих осей за оси z и \tilde{z} соответственно, получим

$$\tilde{I}_{zz} = I_{zz} + \mathcal{M}a^2 \quad (11.34)$$

(поскольку $a_z = 0$). Это есть теорема Гюйгенса–Штейнера.

Момент импульса твердого тела. Уравнение движения твердого тела. Уравнения Эйлера. Устойчивость вращения

Как мы знаем, величина момента импульса системы материальных точек, вообще говоря, зависит от выбора начала координат, относительно которого он определен. И только в том случае, если в выбранной системе отсчета скорость поступательного движения твердого тела $\mathbf{V} = 0$, его момент импульса не зависит от выбора точки отсчета. Поэтому в этом случае естественно в качестве такой точки выбрать центр инерции тела — начало подвижной системы координат. Тогда в выражении для момента импульса

$$\mathbf{M} = \sum m[\mathbf{r} \times \mathbf{v}] \quad (12.1)$$

скорость \mathbf{v} надо заменить на $[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$:

$$\mathbf{M} = \sum m[\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]] = \sum m(\boldsymbol{\Omega}r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r})). \quad (12.2)$$

Вводя тензорные обозначения, получим

$$\begin{aligned} M_i &= \sum m(\Omega_i x_l^2 - x_i(\Omega_k x_k)) = \sum m(\delta_{ik}\Omega_k x_l^2 - x_i x_k \Omega_k) = \\ &= \Omega_k \sum m(x_l^2 \delta_{ik} - x_i x_k) = \Omega_k I_{ik}. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Таким образом, связь между двумя векторами \mathbf{M} и $\boldsymbol{\Omega}$ можно записать в виде

$$M_i = I_{ik}\Omega_k. \quad (12.4)$$

Если оси x_1, x_2, x_3 направлены вдоль главных осей инерции тела, то недиагональные компоненты тензора инерции равны нулю и эта формула дает

$$M_1 = I_1\Omega_1, \quad M_2 = I_2\Omega_2, \quad M_3 = I_3\Omega_3. \quad (12.5)$$

В частности, для шарового волчка, у которого все три главных момента инерции совпадают, $I_1 = I_2 = I_3 = I$, имеем

$$\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}. \quad (12.6)$$

Таким образом, для шарового волчка момент количества движения пропорционален угловой скорости вращения и имеет одинаковое с ней направление.

В общем же случае произвольного тела вектор \mathbf{M} , вообще говоря, **не совпадает** по направлению с вектором $\boldsymbol{\Omega}$. Это обстоятельство является причиной сложного поведения вращающихся тел. Направления \mathbf{M} и $\boldsymbol{\Omega}$ совпадают лишь при вращении твердого тела вокруг одной из его главных осей¹.

Как и у всякой замкнутой системы, момент импульса свободно вращающегося тела постоянен. Для шарового волчка условие $\mathbf{M} = \text{const}$ дает $\boldsymbol{\Omega} = \text{const}$. Это значит, что свободное вращения шарового волчка есть просто равномерное вращение вокруг постоянной оси.

Столь же простым является и случай ротатора. Здесь, так как $I_1 = I_2 = I$, а $I_3 = 0$ (ось 3 направлена вдоль оси ротатора), $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\Omega}$, причем вектор $\boldsymbol{\Omega}$ перпендикулярен оси ротатора. Поэтому свободное вращение ротатора есть равномерное вращение в одной плоскости вокруг направления, перпендикулярного к этой плоскости. Закона сохранения момента достаточно и для определения более сложного свободного вращения симметрического волчка.

Для этого воспользуемся произвольностью выбора направлений главных осей инерции x_1 и x_2 , перпендикулярных к оси симметрии волчка x_3 . А именно, выберем ось x_2 перпендикулярной к плоскости, которая определяется постоянным вектором \mathbf{M} и мгновенным положением оси x_3 (рис. 12.1)

$$x_2 \perp \text{плоскости } \{\mathbf{M}, x_3\}.$$

Тогда $M_2 = 0$, а следовательно, и $\Omega_2 = 0$. Таким образом, направления \mathbf{M} , $\boldsymbol{\Omega}$ и x_3 в каждый момент времени лежат в одной плоскости. Отсюда, в свою очередь, следует, что скорости $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$ всех

¹Это может служить определением главных осей и способом их нахождения на практике.

точек на оси волчка x_3 в каждый момент времени перпендикулярны к этой плоскости. Другими словами, ось волчка равномерно (см. ниже) вращается вокруг направления \mathbf{M} , описывая круговой конус с углом раствора $\theta = \text{const}$. Это есть так называемая **регулярная прецессия** волчка. Одновременно с прецессией сам волчок равномерно вращается вокруг собственной оси x_3 .

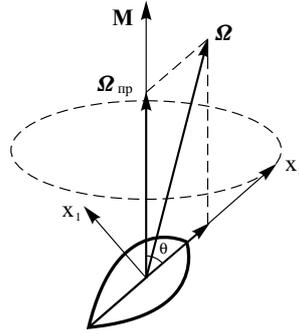


Рис. 12.1. Вращение симметрического волчка.

Угловые скорости обоих вращений легко выразить через заданную величину момента M и угол наклона θ оси волчка x_3 к направлению \mathbf{M} . Угловая скорость вращения волчка вокруг своей оси есть проекция Ω_3 вектора Ω на эту ось:

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3} \cos \theta. \quad (12.7)$$

Для определения же скорости прецессии Ω надо разложить вектор Ω по правилу параллелограмма на составляющие вдоль оси x_3 и вдоль направления \mathbf{M} . Из них первая составляющая вдоль x_3 не приводит ни к какому перемещению самой оси волчка, а поэтому вторая составляющая дает искомую угловую скорость прецессии. Из рисунка видно, что $\Omega \sin \theta = \Omega_1$, а поскольку $\Omega_1 = M_1/I_1 = M \sin \theta/I_1$, то мы получаем

$$\Omega = \frac{M}{I_1}. \quad (12.8)$$

Это и значит, что $\Omega = \text{const}$.

Выведем теперь формулу, связывающую момент импульса \mathbf{M} и угловую скорость вращения Ω с кинетической энергией вращения T . Для этого заметим, что с одной стороны,

$$T = \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k, \quad (12.9)$$

а с другой,

$$M_i = I_{ik} \Omega_k. \quad (12.10)$$

Поэтому имеем

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{I_{ik} \Omega_k}_{M_i} \Omega_i = \frac{1}{2} M_i \Omega_i = \frac{1}{2} \mathbf{M} \cdot \Omega, \quad (12.11)$$

то есть кинетическая энергия вращения равна половине скалярного произведения момента импульса на угловую скорость вращения (сравни с выражением для кинетической энергии поступательного движения $mv^2/2 = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v})/2$). Отсюда для свободного вращения, когда $T = (\mathbf{M} \cdot \Omega)/2 = \text{const}$ и $\mathbf{M} = \text{const}$, следует, что проекция вектора Ω на направление \mathbf{M} в процессе вращения не изменяется.

Уравнения движения твердого тела

Поскольку в общем случае твердое тело обладает **шестью** степенями свободы, то общая система уравнений движения должна содержать шесть независимых уравнений. Их можно представить в виде двух векторных уравнений для скорости изменения импульса и момента импульса тела.

Первое из этих уравнений получается в результате простого суммирования уравнений движения $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{f}$ для каждой из составляющих тело частиц, где \mathbf{p} — импульс частицы, а \mathbf{f} — действующая на нее сила. Вводя полный импульс тела

$$\mathbf{P} = \sum \mathbf{p} = M\mathbf{V} \quad (12.12)$$

и полную действующую на него силу $\sum \mathbf{f} = \mathbf{F}$, получим

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (12.13)$$

Выше мы определили \mathbf{F} как сумму всех сил \mathbf{f} , действующих на каждую из частиц, в том числе и со стороны других частиц тела. Однако ясно, что фактически в \mathbf{F} входят только силы, действующие со стороны внешних источников, поскольку **все силы взаимодействия между частицами самого тела взаимно сокращаются**. Действительно, при отсутствии внешних сил импульс тела, как и у всякой замкнутой системы, должен сохраняться, то есть должно быть $\mathbf{F} = 0$.

Если U — потенциальная энергия твердого тела во внешнем поле, то сила \mathbf{F} может быть определена путем ее дифференцирования по координатам центра инерции тела:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}. \quad (12.14)$$

Для вывода второго уравнения движения, определяющего скорость изменения момента импульса \mathbf{M} , поступим следующим образом. Выберем нашу “неподвижную” (инерциальную) систему отсчета таким образом, чтобы в каждый данный момент времени центр инерции тела покоился относительно нее. Полученное таким образом уравнение будет справедливо и в любой другой инерциальной системе отсчета в силу галилеевского принципа относительности.

Имеем

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{d}{dt} \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] = \sum [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}] + \sum [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}]. \quad (12.15)$$

В силу сделанного нами выбора системы отсчета, в которой $\mathbf{V} = 0$, значение $\dot{\mathbf{r}}$ в данный момент времени совпадает со скоростью $\mathbf{v} = \dot{\phi}$. Но поскольку векторы \mathbf{v} и $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ имеют одинаковое направление, то $[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}] = 0$. Заменяв $\dot{\mathbf{p}}$ на силу \mathbf{f} , получим окончательно

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}, \quad \text{где } \mathbf{K} = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]. \quad (12.16)$$

Вектор $[\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$ называется **моментом силы \mathbf{f}** , так что \mathbf{K} есть сумма моментов всех сил, действующих на тело. Как и в полной силе \mathbf{F} , в сумме $\sum [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$ фактически должны учитываться лишь внешние силы. В соответствии с законом сохранения момента импульса, сумма моментов всех сил, действующих внутри замкнутой системы, должна обращаться в нуль.

Вообще говоря, момент силы, как и момент импульса, зависит от выбора начала координат, относительно которого он определен. Выше все моменты были определены относительно центра инерции тела. Однако представляет интерес выяснить, как момент силы изменяется при переносе начала отсчета. Так, при переносе начала координат на расстояние \mathbf{a} новые радиус-векторы \mathbf{r}' точек тела связаны со старыми \mathbf{r} таким образом:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a}. \quad (12.17)$$

Поэтому

$$\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{f}] = \sum [\mathbf{r}' \times \mathbf{f}] + \sum [\mathbf{a} \times \mathbf{f}], \quad (12.18)$$

или, вынося \mathbf{a} за знак суммы, получаем

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}' + [\mathbf{a} \times \mathbf{F}]. \quad (12.19)$$

Отсюда, в частности, видно, что величина момента сил не зависит от выбора начала координат, если полная сила \mathbf{F} равна нулю (в таком случае говорят, что к телу приложена **пара сил**).

Уравнения Эйлера

Выведенные нами уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K} \quad (12.20)$$

относятся к неподвижной системе координат, и производные в этих уравнениях характеризуют изменение этих векторов по отношению к этой же системе. Для первого уравнения, поскольку $\mathbf{P} = \mathcal{M}\mathbf{V}$, где масса тела \mathcal{M} не меняется со временем, это не приводит к возникновению дополнительных трудностей по сравнению с уравнением движения одной материальной точки. Однако во втором уравнении,

описывающем вращение твердого тела, момент импульса \mathbf{M} связан с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ посредством тензора инерции I_{ik} . Компоненты последнего, будучи неизменными во времени в подвижной (жестко связанной с телом) системе координат, вообще говоря меняются со временем в неподвижной (лабораторной) системе. Это изменение обусловлено поворотом подвижной системы координат относительно неподвижной в процессе вращения. Величина поворота зависит от угловой скорости вращения, которая, в свою очередь, определяется моментами инерции I_{ik} . В результате проблема интегрирования уравнений движения становится несравненно более сложной, чем в случае обычного поступательного движения. В этом мы с вами уже убедились на примере свободного вращения симметрического волчка.

С другой стороны, в подвижной системе координат с осями, направленными по главным осям инерции твердого тела, величины I_{ik} не зависят от времени, и, более того, имеется простая связь между компонентами вращательного момента \mathbf{M} и компонентами угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$. Поэтому представляет интерес выяснить, как будут выглядеть уравнения, описывающие вращение в подвижной системе координат. Для этого нам нужно преобразовать уравнение (12.16) от лабораторной системы к подвижным координатам x_1, x_2, x_3 .

Пусть $d\mathbf{A}/dt$ — скорость изменения какого-либо вектора \mathbf{A} по отношению к неподвижной системе координат. Если по отношению к вращающейся системе вектор \mathbf{A} не изменяется, то его изменение относительно неподвижной системы обусловлено только его вращением и тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}] \quad (12.21)$$

(сравни с выражением $d\mathbf{r}/dt = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}]$). В общем же случае к правой части этого равенства надо добавить скорость изменения вектора \mathbf{A} по отношению к подвижной системе координат. Обозначим эту скорость через $d'\mathbf{A}/dt$. Тогда получим

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}]. \quad (12.22)$$

Эта формула является прямым следствием правила дифференцирования произведения двух функций. Действительно, вектор \mathbf{A} можно разложить по ортам подвижной системы координат:

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{n}_1 + A_2\mathbf{n}_2 + A_3\mathbf{n}_3. \quad (12.23)$$

Тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{dA_1}{dt}\mathbf{n}_1 + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{n}_2 + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{n}_3 \right) + \left(A_1 \frac{d\mathbf{n}_1}{dt} + A_2 \frac{d\mathbf{n}_2}{dt} + A_3 \frac{d\mathbf{n}_3}{dt} \right). \quad (12.24)$$

Учитывая, что

$$\frac{d\mathbf{n}_1}{dt} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}_1], \quad \frac{d\mathbf{n}_2}{dt} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}_2], \quad \frac{d\mathbf{n}_3}{dt} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}_3], \quad (12.25)$$

мы приходим к формуле (12.22), где первое слагаемое соответствует первому слагаемому в формуле (12.24).

Применив это равенство к скорости изменения момента импульса, получим

$$\frac{d'\mathbf{M}}{dt} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}] = \mathbf{K}. \quad (12.26)$$

Положив теперь, что оси подвижной системы координат выбраны вдоль главных осей инерции тела и что $M_1 = I_1\Omega_1$, $M_2 = I_2\Omega_2$, $M_3 = I_3\Omega_3$, получаем для проекции на ось x_1

$$\frac{dM_1}{dt} + [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M}]_1 = K_1, \quad (12.27)$$

или

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + \Omega_2 M_3 - \Omega_3 M_2 = K_1, \quad (12.28)$$

или

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1. \quad (12.29)$$

Применяя такую же процедуру к проекциям на две другие оси, получим систему трех уравнений

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 &= K_1, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_1\Omega_3 &= K_2, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 &= K_3, \end{aligned} \quad (12.30)$$

которые называются **уравнениями Эйлера**. В случае свободного движения $\mathbf{K} = 0$ и мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 &= 0.\end{aligned}\tag{12.31}$$

В качестве примера давайте применим эти уравнения к уже рассматривавшемуся нами свободному вращению симметрического волчка. Полагая $I_2 = I_1$, из третьего уравнения получаем, что

$$\dot{\Omega}_3 = 0, \quad \text{или} \quad \Omega_3 = \text{const}.\tag{12.32}$$

После этого первые два уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_1}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 &= 0, \\ \frac{d\Omega_2}{dt} + \frac{I_1 - I_3}{I_1} \Omega_1 \Omega_3 &= 0.\end{aligned}\tag{12.33}$$

Вводя обозначение

$$\omega = \Omega_3 \frac{I_3 - I_1}{I_1},\tag{12.34}$$

получаем

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_1 &= -\omega \Omega_2, \\ \dot{\Omega}_2 &= \omega \Omega_1.\end{aligned}\tag{12.35}$$

Умножив второе уравнение на i и сложив его с первым уравнением, получаем

$$\frac{d}{dt}(\Omega_1 + i\Omega_2) = i\omega(\Omega_1 + i\Omega_2).\tag{12.36}$$

Решение этого уравнения с разделяющимися переменными, очевидно, такое:

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = A e^{i\omega t},\tag{12.37}$$

где A — постоянная, которую можно считать вещественной (это сводится к надлежащему выбору начала отсчета времени). После этого, используя известную формулу

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,\tag{12.38}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= A \cos \omega t, \\ \Omega_2 &= A \sin \omega t.\end{aligned}\tag{12.39}$$

Из последнего уравнения следует, что проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную оси волчка, вращается в этой плоскости с угловой скоростью ω , оставаясь постоянной по величине: $\sqrt{\Omega_1^2 + \Omega_2^2} = A$. Поскольку проекция Ω_3 на ось волчка тоже постоянна, то мы приходим к выводу, что и весь вектор $\boldsymbol{\Omega}$ равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси волчка x_3 , оставаясь неизменным по величине. Поскольку имеется связь

$$M_1 = I_1 \Omega_1, \quad M_2 = I_1 \Omega_2, \quad M_3 = I_3 \Omega_3\tag{12.40}$$

между компонентами векторов $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{M} , такое же движение (по отношению к оси волчка) совершает, очевидно, и вектор момента \mathbf{M} . Полученная картина, разумеется, совершенно эквивалентна той, которая была получена при рассмотрении движения волчка в неподвижной системе координат.

Устойчивость вращения

Пользуясь уравнениями Эйлера, можно исследовать вопрос об устойчивости вращения твердого тела вокруг одной из главных осей. В частности, можно показать, что вращение вокруг оси с промежуточным значением момента инерции неустойчиво. Пусть, например,

$$I_3 > I_2 > I_1 \quad (12.41)$$

и тело вращается вокруг оси x_2 . Тогда $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$ и $\Omega_2 = \Omega_{20} = \text{const} \neq 0$. Подставляя это в уравнения Эйлера, получим, что

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{d\Omega_2}{dt} = \frac{d\Omega_3}{dt} = 0. \quad (12.42)$$

Таким образом, вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси x_2 удовлетворяет уравнениям Эйлера. Однако, как мы покажем, оно является неустойчивым относительно малого возмущения.

Пусть угловая скорость Ω немного отклонилась от своего направления x_2 , так что появились малые составляющие вдоль осей x_1 и x_3 :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_1, \\ \Omega_3 &= \omega_3, \end{aligned} \quad (12.43)$$

где $\omega_1, \omega_2 \ll \Omega_{20}$ малы (изменением проекции Ω_2 можно в первом приближении пренебречь). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \omega_3 &= 0, \\ \frac{d\omega_3}{dt} + \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} \omega_1 &= 0. \end{aligned} \quad (12.44)$$

Будем искать решение этой системы уравнений в виде экспоненты

$$\omega_1 \sim \omega_3 \sim e^{pt}. \quad (12.45)$$

Подставляя это в (12.44), получаем для величины p систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} p\omega_1 + \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \omega_3 &= 0, \\ \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} \omega_1 + p\omega_3 &= 0. \end{aligned} \quad (12.46)$$

Условие существования нетривиального (то есть отличного от нуля) решения этой системы уравнений заключается в равенстве нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} p & \frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_{20} \\ \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20} & p \end{vmatrix} = 0. \quad (12.47)$$

Отсюда получаем так называемое **характеристическое уравнение** для p

$$p^2 - \frac{I_3 - I_2}{I_1} \cdot \frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_{20}^2 = 0, \quad (12.48)$$

корни которого при $I_3 > I_2 > I_1$ вещественны,

$$p_{1,2} = \pm \Omega_{20} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}}, \quad (12.49)$$

причем $p_1 > 0$, а $p_2 < 0$. Наличие положительного корня означает, что решение $\Omega_1 = \Omega_3 = 0$, $\Omega_2 = \Omega_{20} = \text{const}$ **неустойчиво**, так как случайно возникшее возмущение усиливается и растет по экспоненте:

$$\omega_1 \sim \omega_3 \sim \exp \left\{ \Omega_{20} \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3}} t \right\}. \quad (12.50)$$

Литература

- [1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1979 — 520 с.
- [2] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклевский курс физики, том 1, Механика. М., Наука, 1975 — 480 с.
- [3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике (1–2 том). М., Мир, 1976 — 440 с.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах, том 1, Механика. М., Наука, 1973 — 208 с.
- [5] Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М., Наука, 1988 — 416 с.

Оглавление

Лекция 9.

Изотропия пространства.

Закон сохранения момента

импульса.

Движение в центральном поле

2

Лекция 10.

Задача Кеплера.

Резерфордовское рассеяние

8

Лекция 11.

Движение твердого тела.

Тензор инерции и энергия вращающегося твердого тела

16

Лекция 12.

Момент импульса твердого тела.

Уравнение движения твердого тела.

Уравнения Эйлера.

Устойчивость вращения

22

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. Ф. ИОФФЕ
НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Д. А. Паршин, Г. Г. Зегря

КОЛЕБАНИЯ

(конспект лекций по общему курсу физики)

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Гармонические колебания. Колебания математического маятника. Колебания физического маятника. Фазовый портрет маятника. Адиабатические инварианты

Довольно распространенный тип движения механических систем представляют собой так называемые **малые колебания**, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия. Мы рассмотрим эти движения в наиболее простом случае, когда система имеет всего лишь одну степень свободы. Это значит, что для однозначного определения положения системы в пространстве достаточно задать всего одно число. Это не обязательно должна быть декартова координата, а в зависимости от условий задачи может оказаться более удобным выбор какой-то другой величины. Такая величина, однозначно характеризующая положение системы, называется ее **обобщенной координатой**.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия $U(q)$ как функция некоторой обобщенной координаты q имеет минимум. Отклонения от этого минимума приводят к возникновению силы $-dU/dq$, стремящейся вернуть систему обратно. Обозначим соответствующее минимуму значение координаты q через q_0 . Поскольку при малых колебаниях разность $q - q_0$ предполагается малой, то потенциальную энергию можно разложить в ряд по степеням $q - q_0$, оставив в ней только первый не исчезающий член.

В общем случае справедливо следующее разложение функции $U(q)$ в так называемый **ряд Тейлора** вблизи значения $q = q_0$:

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{1!}U'(q_0)(q - q_0) + \frac{1}{2!}U''(q_0)(q - q_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}U^{[n]}(q_0)(q - q_0)^n + \dots \quad (13.1)$$

В математике доказывается теорема, согласно которой, если точка q_0 не является особой точкой функции $U(q)$ и функция бесконечно кратно дифференцируема в этой точке, так что ни одна из производных не обращается в бесконечность ($U^{[k]}(q_0) \neq \infty$), то формула, записанная выше, является точной. В это нетрудно поверить, потому что фактически справа записана функция, которая при $q = q_0$ принимает то же значение, что и функция $U(q)$, и **все** производные от этой функции совпадают с соответствующими производными от $U(q)$ при $q = q_0$.

В нашем случае первое слагаемое есть просто константа $U(q_0)$, которую можно без ограничения общности считать равной нулю (это есть начало отсчета потенциальной энергии). Второе слагаемое равно нулю в силу того, что в положении минимума равна нулю производная, определяющая силу,

$$U'(q_0) = \left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_0} = 0. \quad (13.2)$$

Поэтому первый не исчезающий член в разложении — это квадратичный:

$$U(q) - U(q_0) \cong \frac{k}{2}(q - q_0)^2, \quad (13.3)$$

где

$$k = U''(q_0) > 0 \quad (13.4)$$

положительная величина. Считая, что $U(q_0) = 0$, и вводя обозначение

$$x = q - q_0, \quad (13.5)$$

получим

$$U(x) = \frac{k}{2}x^2. \quad (13.6)$$

Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы есть квадратичная функция **обобщенной скорости** \dot{q} и в общем случае имеет вид

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2. \quad (13.7)$$

В том же приближении малых колебаний, которое мы использовали ранее, достаточно заменить функцию $a(q)$ на ее значение при $q = q_0$. Вводя для краткости обозначение¹

$$a(q_0) = m, \quad (13.8)$$

получим окончательно для полной энергии системы выражение

$$E = T + U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \quad (13.9)$$

то есть выражение, формально совпадающее с энергией механической системы “грузик+пружинка”, (рис. 13.1). В механике доказывается теорема, что если выражение для полной энергии двух систем как функция их обобщенных координаты и скорости совпадают, то совпадают и уравнения их движения.

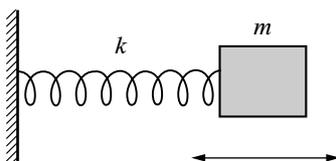


Рис. 13.1. Простейшая модель гармонического осциллятора — грузик на пружинке.

Уравнение движения грузика, как известно, имеет вид $ma = F$, где возвращающая сила $F = -kx$, или

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (ma = -kx). \quad (13.10)$$

Сокращая на m , его можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (13.11)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (13.12)$$

Дифференциальное уравнение $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ является **линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка**. Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений, оно имеет **два** линейно независимых решения. В данном конкретном случае легко проверить, что это функции

$$\sin \omega t \text{ и } \cos \omega t. \quad (13.13)$$

Общее решение представляет собой линейную комбинацию этих двух решений:²

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t, \quad (13.14)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Это выражение можно переписать в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (13.15)$$

Поскольку $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$, то, сравнивая с (13.14), получаем

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{tg } \alpha = -\frac{c_2}{c_1}, \quad (13.16)$$

где $c_1 = a \cos \alpha$, а $c_2 = -a \sin \alpha$.

Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает **гармоническое колебательное движение**. Коэффициент a называется **амплитудой** колебаний, а аргумент косинуса — их **фазой**, α есть начальное значение фазы, зависящее, очевидно, от выбора начала отсчета времени. Величина ω называется **циклической частотой** колебаний, или просто **частотой**.

Частота ω является основной характеристикой колебаний, не зависящей от начальных условий движения, и в частности от энергии. Согласно формуле (13.12), $\omega = \sqrt{k/m}$, то есть она полностью

¹Величина m совпадает с массой, только если x есть декартова координата частицы!

²Линейное однородное уравнение обладает таким свойством, что если $x(t)$ — решение, то $C \cdot x(t)$ — тоже решение. Если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два решения, то их сумма $x_1(t) + x_2(t)$ — тоже решение.

определяется свойствами механической системы как таковой. Необходимо, однако, подчеркнуть, что это свойство частоты связано с предполагаемой малостью колебаний. Оно исчезает при переходе к более высоким приближениям. С математической точки зрения независимость частоты от энергии системы связана с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты. Оно не имеет места, если, например, функция $U(x)$ имеет при $x = 0$ минимум более высокого порядка: $U(x) \propto x^n$, $n > 2$.

Энергия системы, совершающей малые колебания, есть

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}\omega^2 a^2. \quad (13.17)$$

Она пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

В случае гармонических колебаний зависимость координаты колеблющейся системы от времени часто оказывается удобным представлять в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re} \{Ae^{i\omega t}\}, \quad (13.18)$$

где A — комплексная постоянная. Записав ее в виде

$$A = ae^{i\alpha}, \quad (13.19)$$

мы вернемся к старому выражению

$$x = \operatorname{Re} ae^{i\omega t + i\alpha} = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (13.20)$$

Постоянную A называют **комплексной амплитудой**. Ее модуль совпадает с обычной амплитудой, а аргумент — с начальной фазой колебаний.

Оперирование с экспоненциальными множителями в математическом отношении проще, чем с тригонометрическими, так как дифференцирование не изменяет их вида. При этом пока мы производим лишь **линейные операции** (сложение, умножение на постоянные множители, дифференцирование, интегрирование), можно вообще опускать знак вещественной части, переходя к последней лишь в окончательном результате вычислений.

Колебания математического маятника

Рассмотрим в качестве примера колебания **математического маятника** — материальной точки или грузика, размерами которого можно пренебречь и который подвешен на нерастяжимой невесомой нити. Положение нити вертикально вниз является положением устойчивого равновесия. Если откло-

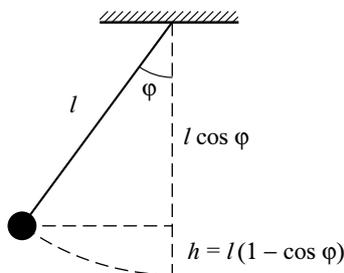


Рис. 13.2. Математический маятник.

нить направление нити от вертикали, то возникнет сила, возвращающая ее в прежнее положение. Попробуем описать движение такого маятника математически.

В качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол φ отклонения нити от вертикали. Потенциальная энергия тогда определяется выражением

$$U = mgh = mgl(1 - \cos \varphi). \quad (13.21)$$

Кинетическая энергия равна

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2. \quad (13.22)$$

В результате полная энергия равна

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi). \quad (13.23)$$

Она остается постоянной в процессе движения. Если мы интересуемся малыми колебаниями $\varphi \ll 1$, то $\cos \varphi$ можно разложить в ряд Тейлора:

$$\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2!}. \quad (13.24)$$

Тогда

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\varphi^2\right). \quad (13.25)$$

Сравнивая это с выражением (13.9),

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2x^2), \quad (13.26)$$

мы приходим к выводу, что математический маятник колеблется с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (13.27)$$

хорошо известной из начального курса физики. Уравнение колебаний имеет следующий вид, аналогичный (13.11):

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \quad (13.28)$$

Его можно получить, воспользовавшись, например, законом сохранения энергии. Дифференцируя (13.25) по времени и приравнивая производную нулю, мы приходим к нужному результату

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}ml^2 \frac{d}{dt} \left(\dot{\varphi}^2 + \frac{g}{l}\varphi^2 \right) = ml^2\dot{\varphi}(\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi) = 0. \quad (13.29)$$

Поскольку в общем случае $ml^2\dot{\varphi} \neq 0$, то должно обращаться в нуль выражение в круглых скобках.

Колебания физического маятника

Рассмотрим теперь малые колебания **физического маятника**. Так в общем случае называется твердое тело произвольной формы, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси C (рис. 13.3). Положение тела в каждый момент времени характеризуется, как и в случае математического маятника, его углом отклонения из положения равновесия φ . Кинетическая энергия физического маятника определяется выражением

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2, \quad (13.30)$$

где I — момент инерции маятника относительно оси вращения C . Обозначим расстояние от оси вращения до центра инерции тела через a . Тогда потенциальная энергия при малых φ определится выражением:

$$U = mga(1 - \cos \varphi) = \frac{1}{2}mga\varphi^2. \quad (13.31)$$

В результате полная энергия маятника равна

$$E = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mga\varphi^2 = \frac{1}{2}I \left(\dot{\varphi}^2 + \underbrace{\frac{mga}{I}}_{\omega^2} \varphi^2 \right), \quad (13.32)$$

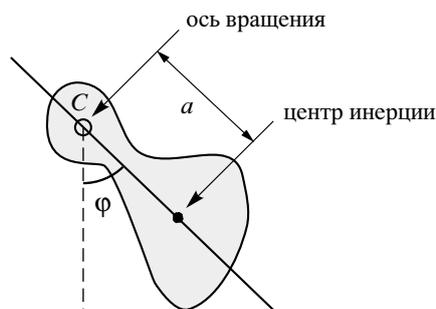


Рис. 13.3. Физический маятник.

а частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (13.33)$$

где $l = I/ma$ — **приведенная длина** физического маятника.

Фазовый портрет маятника

Вернемся опять к колебаниям груза на пружине. Как мы видели, энергия системы определяется выражением

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}. \quad (13.34)$$

Введем вместо скорости импульс $p = m\dot{x}$. Тогда

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = E. \quad (13.35)$$

Разделив это равенство на E , его можно переписать в виде

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{x^2}{2E/k} = 1, \quad (13.36)$$

или

$$\left(\frac{p}{\sqrt{2mE}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2E/k}}\right)^2 = 1. \quad (13.37)$$

В “пространстве” с координатными осями x и p это уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{2mE}$ и $\sqrt{2E/k}$. Пространство с осями “координата–импульс” называется **фазовым пространством** системы.

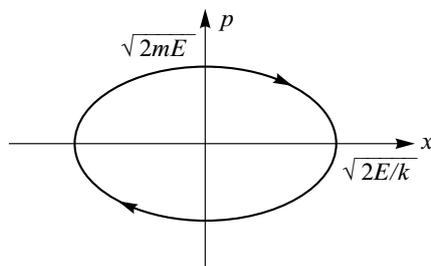


Рис. 13.4. Траектория гармонического осциллятора в фазовом пространстве.

Таким образом, траектория гармонического осциллятора в фазовом пространстве представляет собой эллипс. Поскольку площадь эллипса, задаваемого уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, как известно, равна πab , то в нашем случае площадь под фазовой траекторией определяется выражением

$$S = \pi\sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} = 2\pi E \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \frac{E}{\omega}, \quad (13.38)$$

или

$$\frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega}. \quad (13.39)$$

Величина площади S , заключенной внутри фазовой траектории частицы, деленная на 2π , имеет в физике специальное название **адиабатического инварианта**. Для гармонического осциллятора адиабатический инвариант определяется выражением

$$I = \frac{S}{2\pi} = \frac{E}{\omega}. \quad (13.40)$$

Возникает вопрос, почему величина I была удостоена такого названия.

Здесь все дело в том, что до сих пор мы рассматривали движение при **неизменных параметрах системы**, то есть в нашем случае колебаний груза на пружинке неизменными параметрами движения были масса груза m и упругая постоянная k (а значит и частота ω).

Вообразим теперь ситуацию, когда параметры системы медленно (как говорят, **адиабатически**) меняются со временем. Медленность изменения означает, что за время, равное периоду движения, эти параметры мало изменяются по сравнению со своей первоначальной величиной. Например, если меняется упругая постоянная k , то за время $\Delta t = T$ (T — период движения) она изменяется на величину

$$\Delta k = \frac{dk}{dt} \Delta t = \dot{k}T. \quad (13.41)$$

Это изменение должно быть много меньше самой величины k :

$$\dot{k}T \ll k. \quad (13.42)$$

В этом случае оказывается, что величина адиабатического инварианта I остается в процессе движения **постоянной**. Например, если меняется k , то

$$I = \frac{E}{\omega} = \frac{E}{\sqrt{k/m}} = \text{const}, \text{ или } \frac{E}{\sqrt{k}} = \text{const}. \quad (13.43)$$

В том случае, когда, например, упругая константа k медленно увеличивается, увеличивается и энергия системы $E \propto \sqrt{k}$, или так как

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 = \frac{1}{2}ka^2, \quad (13.44)$$

то $E/\sqrt{k} = \sqrt{k}a^2/2 = \text{const}$. Таким образом, при увеличении k амплитуда колебаний падает по закону

$$a \sim \frac{1}{k^{1/4}}. \quad (13.45)$$

Мы не будем доказывать в общем виде утверждение о сохранении адиабатического инварианта при медленном изменении параметров системы. Однако для частного случая гармонического осциллятора (грузика на пружине) такое доказательство будет представлено. Оно показывает способ, которым это утверждение может быть доказано в других ситуациях.

Запишем выражение для полной энергии системы

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{kx^2}{2}. \quad (13.46)$$

Пусть k меняется медленно. Продифференцируем это равенство по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{k}x^2 = \\ &= \dot{x}(m\ddot{x} + kx) + \frac{1}{2}\dot{k}x^2. \end{aligned} \quad (13.47)$$

Величина, стоящая в круглых скобках, в силу второго закона Ньютона, равна нулю, так что

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\dot{k}x^2, \quad (13.48)$$

то есть скорость изменения энергии системы оказывается пропорциональной малому параметру \dot{k} .

В первом приближении по \dot{k} сюда вместо x можно подставить решение уравнения

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (13.49)$$

где k считается постоянной, то есть $x = a \cos(\omega t + \alpha)$. В результате

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\dot{k}a^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \quad (13.50)$$

Усредним теперь это равенство по быстрым колебаниям грузика³. Учитывая, что \dot{k} — медленная функция времени, и считая ее константой, а среднее значение $\overline{\cos^2(\omega t + \alpha)} = 1/2$, получим

$$\overline{\frac{dE}{dt}} = \frac{1}{2}\dot{k}a^2 \frac{1}{2}. \quad (13.51)$$

³“Быстрым” в том смысле, что за период колебаний величина k практически не изменяется.

В случае гармонических колебаний $E = m\omega^2 a^2/2$. Выражая отсюда a^2 и подставляя в выражение (13.51), получим

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{1}{2} \dot{k} \frac{E}{m\bar{m}} = \frac{1}{2} \frac{\dot{k}E}{k}. \quad (13.52)$$

Здесь в том же приближении под E нужно понимать среднее по периоду значение энергии \bar{E} . В результате

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dk}{dt} \frac{\bar{E}}{k}. \quad (13.53)$$

Сокращая на dt , мы приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{E}}{\bar{E}} = \frac{1}{2} \frac{dk}{k}. \quad (13.54)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$\ln \bar{E} = \frac{1}{2} \ln k + \text{const}, \quad (13.55)$$

или

$$\ln \bar{E} - \ln \sqrt{k} = \text{const}, \quad \implies \quad \ln \left(\frac{\bar{E}}{\sqrt{k}} \right) = \text{const}, \quad (13.56)$$

или

$$\frac{\bar{E}}{\sqrt{k}} = \text{const}. \quad (13.57)$$

Так как $\omega = \sqrt{k/m}$, а m — константа, то мы и приходим к утверждению, что в процессе движения

$$I = \frac{\bar{E}}{\omega} = \text{const}, \quad (13.58)$$

то есть при медленном изменении параметров осциллятора его энергия изменяется пропорционально частоте. Это утверждение остается в силе, если вместо k медленно меняется масса осциллятора m .

Замечательно то, что это равенство справедливо не только для колебаний грузика на пружине, но и для любой другой системы, совершающей гармонические колебания, параметры которой испытывают медленные вариации со временем. Например, это может быть математический маятник, изображенный на рис. 13.2, длина которого l медленно меняется со временем. Более того, сохранение адиабатического инварианта имеет место для **любой** системы, совершающей финитное движение, при медленном изменении параметров последней. Конкретная его форма, однако, зависит от типа движения. По определению, адиабатический инвариант определяется выражением

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint pdq, \quad (13.59)$$

где p — обобщенный импульс, а q — обобщенная координата и интеграл берется по области изменения этой координаты **туда и обратно** (на что указывает кружок \circ на значке интеграла).

Для примера рассмотрим систему, представляющую собой шарик, который помещен в коробку, где он движется от стенки к стенке, упруго отражаясь от них, совершая тем самым колебательное движение (но колебания эти не гармонические) (рис. 13.5). Траектория этой системы в фазовом

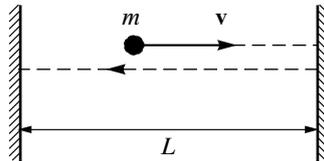


Рис. 13.5. Частица движущаяся между двумя стенками.

пространстве имеет вид прямоугольника, изображенного на рис. 13.6. Площадь под ней равна $2pL$, где $p = mv$ — импульс. В итоге адиабатический инвариант имеет следующий вид:

$$I = \frac{1}{2\pi} \cdot 2pL = \frac{1}{\pi} pL \quad (13.60)$$

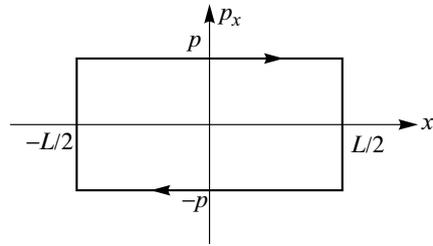


Рис. 13.6. Траектория в фазовом пространстве для частицы, движущейся между двумя стенками.

и его сохранение означает, что

$$pL = \text{const.} \quad (13.61)$$

В данном случае единственным параметром колебательной системы является длина коробки L . Это значит, что если L медленно меняется со временем, то импульс частицы изменяется по закону

$$p \sim \frac{1}{L}. \quad (13.62)$$

Другое доказательство этого факта, исходя из известных законов упругого отражения шарика от медленно движущейся стенки, предоставляется вам самим.

Вынужденные колебания. Биения. Затухающие колебания. Добротность. Вынужденные колебания при наличии трения. Принцип суперпозиции колебаний

Перейдем теперь к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует переменная во времени внешняя сила $F(t)$. Такие колебания называют **вынужденными**, в отличие от **свободных** колебаний, рассмотренных ранее.

Уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = F(t), \quad (14.1)$$

где $F(t)$ есть внешняя сила. Уравнение движения можно переписать в виде

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}, \quad (14.2)$$

где мы снова ввели частоту свободных колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$.

По математической терминологии, уравнение (14.2) представляет собой **неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами**. Слово “неоднородное” означает, что правая часть этого уравнения отлична от нуля. В математике доказывается теорема, согласно которой общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является суммой двух выражений,

$$x = x_0 + x_1, \quad (14.3)$$

где x_0 — общее решение однородного уравнения (то есть с правой частью равной нулю), а x_1 — любое частное решение неоднородного уравнения. В данном случае x_0 представляет собой рассмотренные ранее свободные колебания.

Рассмотрим, далее, представляющий особый интерес частный случай, когда вынуждающая сила является простой периодической функцией времени с некоторой частотой γ :

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \quad (14.4)$$

Частный интеграл уравнения (14.2) ищем в виде

$$x_1 = b \cos(\gamma t + \beta) \quad (14.5)$$

с тем же периодическим множителем. Подставляя это решение в уравнение

$$-\gamma^2 b \cos(\gamma t + \beta) + \omega^2 b \cos(\gamma t + \beta) = \frac{f}{m} \cos(\gamma t + \beta), \quad (14.6)$$

мы находим амплитуду вынужденных колебаний

$$b = \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)}. \quad (14.7)$$

Прибавляя решение однородного уравнения, получим общее решение в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (14.8)$$

Произвольные постоянные a и α определяются, как и раньше, из начальных условий.

Мы приходим к выводу, что движение под действием периодической вынуждающей силы представляет собой суперпозицию двух колебаний — с собственной частотой системы ω и с частотой вынуждающей силы γ .

Полученное выше решение (14.8) не применимо в случае так называемого **резонанса**, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы, то есть при $\omega = \gamma$. Второе

слагаемое в формуле (14.8) в этом случае обращается в бесконечность. Между тем очевидно, что за конечное время t система не может приобрести бесконечную энергию под действием конечной силы. Поэтому формально компенсировать эту нефизическую расходимость можно за счет первого слагаемого. Поскольку амплитуда свободных колебаний никак нами не была фиксирована, выделим из первого слагаемого член, компенсирующий бесконечность во втором слагаемом при $\omega = \gamma$. Для этого произведем замену

$$a \cos(\omega t + \alpha) \implies a \cos(\omega t + \alpha) - \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\omega t + \beta). \quad (14.9)$$

Нетрудно убедиться, что при этом мы снова получаем общее решение однородного уравнения.

Теперь общее решение неоднородного уравнения можно представить в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)]. \quad (14.10)$$

Далее используем формулу

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{y+x}{2}. \quad (14.11)$$

В результате при $\omega \rightarrow \gamma$, заменяя $\sin(\omega - \gamma)t/2 \implies (\omega - \gamma)t/2$, получаем

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \quad (14.12)$$

Нетрудно проверить, что второе слагаемое в этой формуле действительно удовлетворяет уравнению движения (то есть является частным интегралом) при $\omega = \gamma$. Таким образом, мы видим, что в случае резонанса амплитуда вынужденных колебаний линейно растет со временем. В конце концов колебания перестают быть малыми и вся теория теряет свою применимость.

Выясним теперь, как выглядят малые колебания вблизи резонанса, когда $\gamma = \omega + \varepsilon$, где ε — малая величина. Для этого представим общее решение в комплексном виде

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega + \varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t}) e^{i\omega t}, \quad (14.13)$$

где A и B — комплексные постоянные, из которых можно выделить модуль и фазу:

$$A = ae^{i\alpha}, \quad B = be^{i\beta}. \quad (14.14)$$

В силу условия $\varepsilon \ll \omega$ мы можем рассматривать величину $A + Be^{i\varepsilon t}$ в круглых скобках как медленно меняющуюся функцию времени по сравнению с множителем $e^{i\omega t}$. Поэтому движение вблизи резонанса выглядит как малые колебания, но с амплитудой и фазой, медленно меняющимися во времени. Обозначив амплитуду через C , имеем

$$C = |A + Be^{i\varepsilon t}|, \quad (14.15)$$

или, учитывая выражения для A и B , получим

$$C = |ae^{i\alpha} + be^{i(\varepsilon t + \beta)}| = |a + be^{i(\varepsilon t + \beta - \alpha)}|. \quad (14.16)$$

Отсюда

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon t + \beta - \alpha), \quad (14.17)$$

и мы видим, что амплитуда C колеблется периодически с малой частотой ε между двумя пределами

$$|a - b| \leq C \leq a + b. \quad (14.18)$$

Это явление носит название **биений** (рис. 14.1).

Затухающие колебания

До сих пор мы рассматривали идеализированную ситуацию — **модель**, в которой движение тела происходит в пустоте, или ситуацию, в которой влиянием среды на движение можно пренебречь. На самом деле понятно, что при движении тела в среде последняя всегда оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. При этом энергия движущегося тела в конце концов переходит в тепло. В таких случаях говорят, что имеет место **диссипация** энергии.

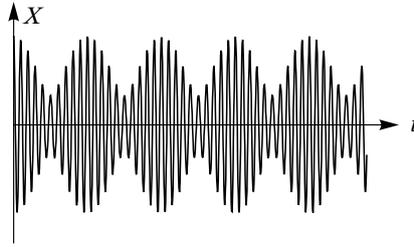


Рис. 14.1. Биения.

В этих условиях процесс движения уже не является чисто механическим процессом. Наряду с движением тела требуется учитывать движение и самой среды, а значит и изменение теплового состояния как среды, так и тела. В такой ситуации уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение тела является лишь функцией его координат и скорости в данный момент времени. Таким образом, в этой ситуации в общем случае не существует уравнений движения в том смысле, какой они имеют в механике: произведение массы на ускорение равно действующей силе. Может, например, иметь место реакция запаздывания отклика среды на возмущение, вносимое телом. Таким образом, задача о движении тела в среде (или задача об упругих деформациях самого тела, например колебания грузика на пружине), вообще говоря, не является задачей чистой механики.

Однако если движение тела в среде достаточно медленное по сравнению со скоростью внутренних диссипативных процессов, то реакция среды на движение тела в некоторых случаях может быть приближенно описана введением так называемой **силы трения**, действующей на тело и зависящей лишь от скорости последнего. Такая ситуация возникает, например, при движении тела в вязкой среде, жидкости или газе. Если к тому же эта скорость достаточно мала, то можно разложить силу трения по ее степеням. Нулевой член разложения равен нулю, поскольку на неподвижное тело не действует никакой силы. Поэтому первый исчезающий член пропорционален скорости тела¹. В итоге в случае одной степени свободы обобщенную силу трения можно записать в виде

$$f_p = -\alpha_p \dot{x}. \quad (14.19)$$

Здесь α_p — положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила направлена противоположно скорости тела.

Добавляя эту силу к упругой силе в уравнение движения, получим

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha_p \dot{x}. \quad (14.20)$$

Разделим это уравнение на m и введем обозначения

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m} \quad \text{и} \quad 2\lambda \equiv \frac{\alpha_p}{m} > 0. \quad (14.21)$$

Здесь ω_0 есть частота свободных колебаний системы в отсутствие трения. Величина λ называется **коэффициентом затухания**. В итоге мы приходим к уравнению

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (14.22)$$

Решение этого однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будем искать в виде $x = e^{rt}$. Подставляя эту функцию в уравнение и сокращая на e^{rt} , находим для r характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0. \quad (14.23)$$

У этого квадратного уравнения имеется два корня:

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (14.24)$$

С учетом этого общее решение уравнения (14.22) можно записать в виде

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad (14.25)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

¹Эти рассуждения заведомо не применимы к движению одного твердого тела по поверхности другого, то есть при наличии так называемого **трения скольжения**.

Для дальнейшего анализа следует различать два случая.

Если $\lambda < \omega_0$, то корни $r_{1,2}$ оказываются комплексными и сопряженными друг другу:

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (14.26)$$

Общее решение в этом случае может быть представлено в виде

$$x = \operatorname{Re} \left\{ A \exp \left(-\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \right) \right\}, \quad (14.27)$$

где A — произвольная комплексная постоянная. Выделяя из нее вещественные модуль a и фазу α , можно записать

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \text{где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (14.28)$$

Движение, описываемое этой формулой, представляет собой так называемые **затухающие колебания**. Его можно представить себе как гармонические колебания с экспоненциально затухающей амплитудой (рис. 14.2). Скорость убывания амплитуды определяется коэффициентом затухания λ .

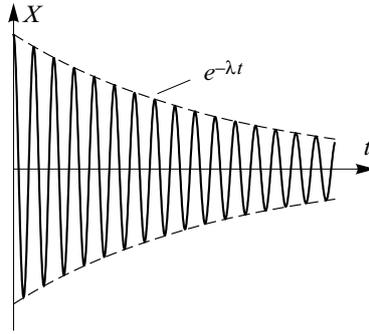


Рис. 14.2. Затухающие колебания, $\lambda < \omega_0$.

Что касается частоты колебаний ω , то она меньше частоты свободных колебаний ω_0 в отсутствие трения. Причина проста — трение обычно задерживает движение.

Если трение достаточно мало, то $\lambda \ll \omega_0$ и за время одного периода $2\pi/\omega$ амплитуда затухающего колебания почти не изменяется. В этом случае для энергии системы существует достаточно простое выражение. В общем случае энергия колеблющейся системы есть сумма кинетической и потенциальной энергий:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2). \quad (14.29)$$

Величина x определяется выражением (14.28). Дифференцируя по времени, получим скорость

$$\dot{x} = -a\omega e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \alpha) - \lambda a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (14.30)$$

В силу неравенства $\lambda \ll \omega$ второе слагаемое в этом выражении много меньше первого, и им можно пренебречь. Тогда получаем для энергии

$$E = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 e^{-2\lambda t}. \quad (14.31)$$

Отсюда следует, что энергия системы в этом приближении убывает по закону

$$E = E_0 e^{-2\lambda t}, \quad (14.32)$$

где $E_0 = ma^2\omega^2/2$ — начальное значение энергии.

Для характеристики осциллирующей системы часто применяется величина Q , называемая **добротностью**. Она представляет собой умноженное на 2π отношение запасенной в системе энергии к величине энергии, теряемой за один период колебаний $T = 2\pi/\omega$:

$$Q = 2\pi \frac{E}{\left| T \frac{dE}{dt} \right|}. \quad (14.33)$$

Для слабо затухающего гармонического осциллятора $\omega \approx \omega_0$ и

$$Q = 2\pi \frac{E}{2\lambda ET} = \frac{\pi}{\lambda T} = \frac{\omega_0}{2\lambda} \gg 1. \quad (14.34)$$

Безразмерная величина $\lambda T \ll 1$ называется **логарифмическим декрементом затухания**.

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda > \omega_0$. В этом случае оба значения r вещественны и отрицательны. Общее решение имеет вид

$$x = c_1 e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}. \quad (14.35)$$

Мы видим, что в этом случае, когда трение велико, величина $|x|$ монотонно убывает до нуля, не испытывая никаких колебаний². Такой характер движения называют **апериодическим затуханием** (рис. 14.3).

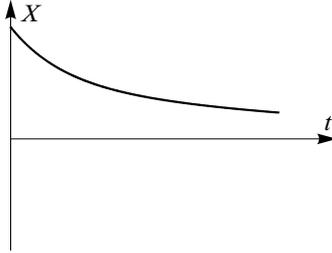


Рис. 14.3. Апериодически затухающее движение, $\lambda > \omega_0$.

Особого рассмотрения требует случай $\lambda = \omega_0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет всего один (двойной) корень $r = -\lambda$ и, как показывается в математике, в этом случае общее решение дифференциального уравнения принимает вид

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t} \quad (14.36)$$

(проверьте это подстановкой). Это есть особый случай апериодического затухания. Движение в этом случае тоже не имеет колебательного характера.

Вынужденные колебания при наличии трения

Рассмотрим теперь вынужденные колебания при наличии трения в случае периодической вынуждающей силы $f \cos \gamma t$, где f — амплитуда вынуждающей силы, а γ — ее частота. Уравнение движения имеет в этом случае вид

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t. \quad (14.37)$$

Решение этого уравнения будем искать в комплексной форме. Для этого в правой части вместо $\cos \gamma t$ запишем $e^{i\gamma t}$:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}. \quad (14.38)$$

Отсюда видно, что $\text{Re } x$ удовлетворяет уравнению (14.37). Поэтому, решив уравнение (14.38) и взяв от решения вещественную часть, мы найдем тем самым решение уравнения (14.37).

Частный интеграл уравнения (14.38) будем искать в виде $x = B e^{i\gamma t}$. Подставляя это решение в (14.38), получаем

$$(i\gamma)^2 B e^{i\gamma t} + 2\lambda(i\gamma) B e^{i\gamma t} + \omega_0^2 B e^{i\gamma t} = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}, \quad (14.39)$$

и сокращая на $e^{i\gamma t}$, получаем для комплексной амплитуды B

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \quad (14.40)$$

Представив B в виде

$$B = b e^{i\delta}, \quad (14.41)$$

²При $x(0) > 0$ и $\dot{x}(0) > 0$ на кривой $x(t)$ имеется один максимум.

где b и δ — вещественные модуль и фаза комплексного числа B , получаем

$$b = |B| = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}. \quad (14.42)$$

Выражение для фазы можно получить, записав B в виде

$$B = \frac{f}{m} \frac{\omega_0^2 - \gamma^2 - 2i\lambda\gamma}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2} = be^{i\delta} = b \cos \delta + ib \sin \delta. \quad (14.43)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{Im} B}{\operatorname{Re} B} = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (14.44)$$

Отделяя вещественную часть решения, получим

$$\operatorname{Re} \{be^{i\delta} e^{i\gamma t}\} = \operatorname{Re} \{be^{i(\gamma t + \delta)}\} = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (14.45)$$

По математической теореме, которую мы упоминали в начале лекции, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения (с правой частью равной нулю!) и частного решения неоднородного уравнения. Поэтому имеем, например, в случае $\omega_0 > \lambda$ для общего решения уравнения (14.37)

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (14.46)$$

Первое слагаемое в этом выражении экспоненциально убывает со временем, так что по истечении достаточно большого промежутка времени (в пределе $t \rightarrow \infty$) остается только второй член

$$x = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (14.47)$$

Как следует из полученного нами выражения для амплитуды вынужденного колебания (14.42), она возрастает при приближении частоты вынуждающей силы γ к собственной частоте колебаний ω_0 . Однако из-за наличия трения она не обращается в бесконечность, как это было в случае резонанса при отсутствии трения. При заданной амплитуде вынуждающей силы амплитуда вынужденных колебаний достигает своего максимального значения при частоте

$$\gamma_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}. \quad (14.48)$$

При $\lambda \ll \omega_0$

$$\gamma_m = \omega_0 - \frac{\lambda^2}{\omega_0}, \quad (14.49)$$

то есть γ_m отличается от ω_0 лишь на величину второго порядка малости.

Рассмотрим теперь область частот вблизи резонанса в случае слабого трения, то есть при $\lambda \ll \omega_0$. Положим $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$, где ε — малая величина. Тогда в выражении (14.40) для комплексной амплитуды B можно приближенно заменить

$$\omega_0^2 - \gamma^2 = (\omega_0 - \gamma)(\omega_0 + \gamma) \approx -\varepsilon \cdot 2\omega_0 = -2\omega_0\varepsilon, \quad 2\lambda\gamma \approx 2\lambda\omega_0. \quad (14.50)$$

В результате получим

$$B = -\frac{f}{2m\omega_0(\varepsilon - i\lambda)} = -\frac{f(\varepsilon + i\lambda)}{2m\omega_0(\varepsilon^2 + \lambda^2)}. \quad (14.51)$$

Отсюда

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{\lambda}{\varepsilon}. \quad (14.52)$$

Из выражения (14.51) следует, что $\operatorname{Im} B < 0$, то есть разность фаз δ между колебанием и вынуждающей силой всегда отрицательна. Это и понятно. При наличии трения колебание всегда “запаздывает” относительно вынуждающей силы. Вдали от резонанса при $\gamma < \omega_0$ ($\varepsilon < 0$) величина $\delta \rightarrow -0$. А в области больших частот, $\gamma > \omega_0$ ($\varepsilon > 0$), фаза стремится к значению, равному $-\pi$. В резонансе, когда $\gamma = \omega_0$, фаза $\delta = \pi/2$. Изменение фазы от -0 до $-\pi$ происходит в узкой полосе вблизи резонанса шириной порядка λ . Отметим здесь, что в отсутствие трения изменение фазы вынужденных колеба-

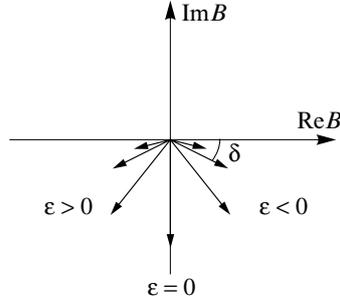


Рис. 14.4. Плоскость комплексной переменной B .

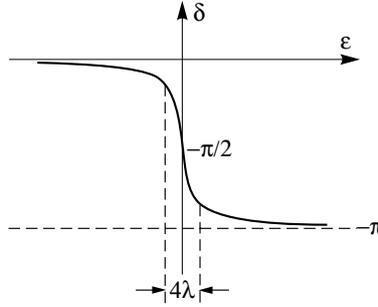


Рис. 14.5. Зависимость разности фаз от частоты.

ний на величину π происходит скачком при $\gamma = \omega_0$ (второй член в выражении (14.8) при этом меняет знак). Учет трения размывает этот скачок.

При установившемся движении, когда система совершает вынужденные колебания по закону (14.47), ее энергия, очевидно, остается неизменной. Однако при этом внешняя сила непрерывно совершает работу над системой. Иными словами, система непрерывно поглощает (от источника внешней силы) энергию, которая в конечном счете диссипируется в тепло благодаря наличию трения.

Пусть $I(\gamma)$ обозначает количество энергии, поглощаемой системой в среднем в единицу времени, как функцию частоты вынуждающей силы. Эта величина, как известно, равна работе внешней силы за единицу времени, то есть мощности (усредненной затем по времени):

$$dA = f(t)dx, \quad \text{или} \quad \frac{dA}{dt} = f(t) \cdot \frac{dx}{dt}. \quad (14.53)$$

Отсюда, согласно уравнению движения,

$$\dot{A} = f(t)\dot{x} = (m\ddot{x} + 2\lambda m\dot{x} + m\omega_0^2 x)\dot{x} = m\ddot{x}\dot{x} + 2\lambda m\dot{x}^2 + m\omega_0^2 x\dot{x}. \quad (14.54)$$

При усреднении по времени первое и третье слагаемые в этом выражении, будучи произведениями синуса на косинус, очевидно, дают нуль. В результате остается лишь вклад от второго слагаемого

$$\bar{\dot{A}} = 2\lambda m \bar{\dot{x}^2}. \quad (14.55)$$

Подставляя сюда $\dot{x} = -b\gamma \sin(\gamma t + \delta)$ и производя усреднение по времени, получаем

$$I(\gamma) = \bar{\dot{A}} = \lambda m b^2 \gamma^2. \quad (14.56)$$

Вблизи резонанса $\gamma \approx \omega_0$ амплитуда b определяется формулой (14.52). В итоге получаем

$$I(\varepsilon) = \lambda m \frac{f^2}{4m^2\omega_0^2(\varepsilon^2 + \lambda^2)} \omega_0^2 = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \quad (14.57)$$

Такой вид зависимости поглощения от частотной расстройки относительно резонанса (то есть разности $\gamma - \omega_0$) называют **дисперсионным**. Полушириной резонансной кривой (см. рис. 14.6) $\Delta\varepsilon$ называется значение $|\varepsilon|$, при котором величина $I(\varepsilon)$ уменьшается вдвое по сравнению с ее максимальным значением при $\varepsilon = 0$. Из формулы (14.57) следует, что в рассматриваемом случае $\Delta\varepsilon = \lambda$. С другой стороны, высота максимума

$$I(0) = \frac{f^2}{4m\lambda} \quad (14.58)$$

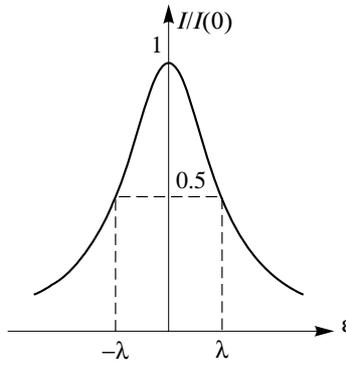


Рис. 14.6. Резонансная кривая поглощения.

обратно пропорциональна λ . Поэтому при уменьшении трения λ резонансная кривая становится уже и выше, то есть ее максимум становится более острым. Однако площадь под резонансной кривой остается при этом неизменной. Действительно, эта площадь определяется интегралом

$$\int_0^\infty I(\gamma) d\gamma = \int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (14.59)$$

Функция $I(\varepsilon)$ имеет максимум при $\varepsilon = 0$ и быстро убывает при увеличении $|\varepsilon|$. По этой причине область больших $|\varepsilon|$ вносит лишь незначительный вклад в интеграл. Поэтому при интегрировании для $I(\varepsilon)$ можно использовать выражение (14.57), а нижний предел заменить на $-\infty$. Тогда

$$\int_{-\infty}^\infty I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\lambda f^2}{4m} \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2}}_{\pi\lambda} = \frac{\pi f^2}{4m}. \quad (14.60)$$

Суперпозиция колебаний

Линейность уравнений движения, описывающих вынужденные гармонические колебания (с трением и без него), приводит к тому, что оказывается справедливым так называемый **принцип суперпозиции колебаний**.

Пусть, например, на систему, совершающую колебательное движение, действует внешняя сила, зависящая от времени и представляющая собой суперпозицию двух сил

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t). \quad (14.61)$$

Это могут быть, например, периодические по времени функции с различными частотами γ_1 и γ_2 . Уравнение движения тогда запишется в виде

$$m\ddot{x} + \alpha_p \dot{x} + kx = f_1(t) + f_2(t). \quad (14.62)$$

Согласно принципу суперпозиции,

решение этого уравнения есть сумма решений того же уравнения под воздействием каждой из сил в отдельности,

то есть

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad (14.63)$$

где функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$m\ddot{x}_j + \alpha_p \dot{x}_j + kx_j = f_j(t), \quad j = 1, 2. \quad (14.64)$$

Проверяется это утверждение непосредственной подстановкой. Для этого первое из уравнений (14.64) складывают со вторым. В силу линейности всех операций в левой части уравнения (14.64), мы и приходим к сформулированному выше принципу суперпозиции колебаний. Заметим, что равенство (14.3) является, очевидно, следствием этого принципа.

Параметрический резонанс

Действие на колебательную систему периодической внешней силы — не единственный путь, чтобы возбудить в ней колебания. Существуют незамкнутые системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем их параметров. Простейший пример такого рода — это математический маятник, длина которого l периодически изменяется за счет вытягивания и опускания нити, на конце которой привязан грузик (рис. 15.1).

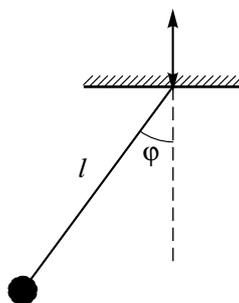


Рис. 15.1. Маятник с переменной длиной.

Другим широко известным примером являются качели, где человек, приседая и выпрямляясь, периодически изменяет момент инерции системы (рис. 15.2)¹. В обоих случаях при определенных

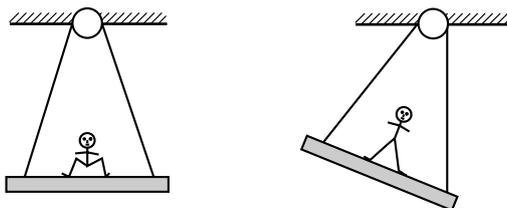


Рис. 15.2. Качели.

условиях в системе возникают колебания. Это явление получило название **параметрического резонанса**.

Рассмотрим условия возникновения параметрического резонанса на примере простейшей колебательной системы — грузика с массой m на пружине — в ситуации, когда периодически изменяется жесткость пружины k . Несмотря на то, что придумать, как это можно осуществить на практике, непросто, можно показать математически, что к задаче такого рода сводятся все задачи о параметрическом резонансе в системах с одной степенью свободы (в том числе и перечисленные выше). Уравнение движения запишем в виде

$$m\ddot{x} + k(t)x = 0. \quad (15.1)$$

Пусть жесткость пружины меняется по простому гармоническому закону $k(t) = k_0(1 + h \cos \gamma t)$. Тогда, разделив на массу, уравнение движения можно переписать так:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)x = 0, \quad (15.2)$$

где $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$ — невозмущенная частота собственных колебаний системы. Величину возмущения h мы будем считать малой, $h \ll 1$.

Будем решать это уравнение по теории возмущений по малому параметру h . В нулевом приближении, то есть при $h = 0$, решением уравнения (15.2) является, как известно, функция $a_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$. Поэтому при малом, отличном от нуля h можно полагать, что решение будет слабо отличаться от невозмущенного решения. Поэтому будем искать его в виде

$$x = a_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) + x_1, \quad (15.3)$$

¹И разумеется, положение центра тяжести.

где x_1 — мало и предполагается, что оно пропорционально малому параметру h .

Подставляя это x в уравнение (15.2), получаем уравнение для малой добавки x_1

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -h\omega_0^2 a_0 \cos \gamma t \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (15.4)$$

где мы пренебрегли членом, пропорциональным произведению hx_1 , поскольку он второго порядка малости, то есть $\propto h^2$. Легко видеть, что это уравнение описывает вынужденные колебания осциллятора с собственной частотой ω_0 под действием вынуждающей силы f , зависящей от времени. Эту силу (на единицу массы) можно представить в виде суммы двух гармонических составляющих:

$$\begin{aligned} f &= -ha_0\omega_0^2 \cos \gamma t \cos(\omega_0 t + \alpha) = \\ &= -\frac{1}{2}ha_0\omega_0^2 \{ \cos [(\gamma + \omega_0)t + \alpha] + \cos [(\gamma - \omega_0)t - \alpha] \} \end{aligned} \quad (15.5)$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции, решение уравнения (15.4) есть сумма решений под действием каждой из этих составляющих в отдельности. Пользуясь результатами, изложенными в предыдущей лекции, не составляет труда выписать их в явном виде.

Интересная ситуация, однако, возникает, если один из косинусов в выражении для силы имеет частоту, равную собственной частоте колебаний системы ω_0 . Посмотрим, при каких значениях частоты γ это может произойти. В первом косинусе это произойдет, если

$$\gamma + \omega_0 = \omega_0, \quad \text{или} \quad \gamma = 0. \quad (15.6)$$

Но этот случай не представляет для нас интереса, так как $\gamma = 0$, означает, что параметры системы со временем не меняются. Во втором случае условие

$$\gamma - \omega_0 = \omega_0, \quad \text{или} \quad \gamma = 2\omega_0 \quad (15.7)$$

означает, что если частота $\gamma = 2\omega_0$, то в системе возникает резонанс и решение x_1 неограниченно растет со временем². Иными словами, в системе происходит возбуждение колебаний, то есть имеет место параметрический резонанс. Таким образом, условие $\gamma = 2\omega_0$ является условием возникновения в системе параметрического резонанса.

Более точный анализ показывает, что раскачка колебаний имеет место в целом диапазоне частот $\Delta\gamma$ вокруг частоты $2\omega_0$. Так, если мы введем обозначение

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon, \quad (15.8)$$

где ε — малая расстройка, то можно показать, что в отсутствие трения параметрический резонанс возникает в диапазоне частот

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2}. \quad (15.9)$$

В том случае, когда в системе присутствует затухание, уравнение для x выглядит следующим образом:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t] x = 0. \quad (15.10)$$

Тогда можно показать (см. приложение), что условие параметрического резонанса принимает вид

$$|\varepsilon| < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \quad (15.11)$$

При $\lambda = 0$ это условие переходит в (15.9). Из этого соотношения следует, что при наличии трения резонанс оказывается возможным не при сколь угодно малой амплитуде h , а лишь начиная с определенного порога

$$h_c = \frac{4\lambda}{\omega_0}. \quad (15.12)$$

Можно показать, что параметрический резонанс имеет место также при частотах γ , близких к значениям вида $2\omega_0/n$, где n — любое целое число. Однако ширина резонансных областей (областей неустойчивости) в отсутствие затухания с увеличением n быстро уменьшается, как h^n .

²В результате x_1 становится вовсе не малым, как мы предполагали вначале. Однако нас в настоящий момент интересует не амплитуда возникших колебаний, а лишь условия их появления.

Приложение

Найдем условия возникновения параметрического резонанса в системе, описываемой уравнением вида

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t)x = 0. \quad (15.13)$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$x = ae^{(s+i\gamma/2)t} + a^*e^{(s-i\gamma/2)t}, \quad (15.14)$$

где s — некоторое вещественное число, а a — комплексная амплитуда. Если $s > 0$, то мы имеем экспоненциально растущее во времени решение, что и означает параметрическую раскачку колебаний. Подставим теперь это x в уравнение. Имея в виду, что основной резонанс возникает на частоте $\gamma/2$, в произведении $x \cos \gamma t$ удержим только гармоники с частотой $\gamma/2$:³

$$\begin{aligned} x \cos \gamma t &= \left[ae^{(s+i\gamma/2)t} + a^*e^{(s-i\gamma/2)t} \right] (e^{i\gamma t} + e^{-i\gamma t}) / 2 = \\ &= \frac{a}{2} e^{(s-i\gamma/2)t} + \frac{a^*}{2} e^{(s+i\gamma/2)t} + \text{остальные гарм.} \end{aligned} \quad (15.15)$$

Приравнивая теперь в уравнении (15.13) коэффициенты при экспонентах $e^{i\gamma t/2}$ и $e^{-i\gamma t/2}$ по отдельности, получаем для комплексной амплитуды a следующую линейную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \left[\left(s + i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left(s + i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 \right] a + \frac{h\omega_0^2}{2} a^* &= 0 \\ \frac{h\omega_0^2}{2} a + \left[\left(s - i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left(s - i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 \right] a^* &= 0, \end{aligned} \quad (15.16)$$

Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} \left(s + i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left(s + i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 & \frac{h\omega_0^2}{2} \\ \frac{h\omega_0^2}{2} & \left(s - i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left(s - i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\left| \left(s + i\frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\lambda \left(s + i\frac{\gamma}{2} \right) + \omega_0^2 \right|^2 = \left(\frac{h\omega_0^2}{2} \right)^2. \quad (15.17)$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\left(s^2 + \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} + 2\lambda s \right)^2 + \gamma^2(s + \lambda)^2 = \left(\frac{h\omega_0^2}{2} \right)^2. \quad (15.18)$$

Отсюда границы резонанса можно определить, положив $s = 0$ (внутри этих границ s положительно). Имеем

$$\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^2 = \left(\frac{h\omega_0^2}{2} \right)^2 - \gamma^2\lambda^2. \quad (15.19)$$

Подставляя сюда $\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon$, где ε мало, получаем окончательно

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - 4\lambda^2}, \quad (15.20)$$

что и требовалось доказать.

³Остальные гармоники имеют более высокий порядок малости по параметру $h \ll 1$.

Нелинейные колебания. Фазовый портрет ангармонического осциллятора. Отображение Пуанкаре. Понятие о фракталах. Предсказуемость хаотического движения

Если амплитуда колебаний не мала, то в разложении потенциальной энергии $U(q)$ в ряд Тейлора по отклонению от положения равновесия $x = q - q_0$ необходимо учитывать степени x выше второй. Физическая причина наличия таких членов может, например, заключаться в зависимости параметров системы от величины отклонения от положения равновесия. Например, для грузика на пружине жесткость пружины k может увеличиваться при больших сжатиях (растяжениях). В результате k

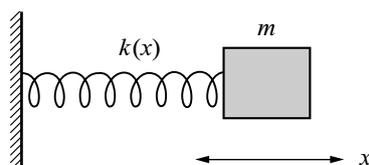


Рис. 16.1. Простейшая модель ангармонического осциллятора.

зависит от смещения x :

$$k = k(x) = k_0(1 + \alpha x^2), \quad (16.1)$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент, характеризующий степень увеличения жесткости пружины при деформации. Возвращающая сила становится при этом **нелинейной** функцией смещения:

$$F = -k_0 x (1 + \alpha x^2). \quad (16.2)$$

Такая зависимость силы от смещения соответствует потенциальной энергии

$$U(x) = \frac{k_0}{2} x^2 + \frac{k_0 \alpha}{4} x^4. \quad (16.3)$$

Данная система является **нелинейным**, или **ангармоническим** осциллятором. При отклонении тела (вправо, влево) от положения равновесия оно начинает совершать свободные **ангармонические** (несинусоидальные) колебания. Главное отличие таких колебаний от гармонических заключается в том, что их период зависит от полной энергии системы E .

Другим примером ангармонических колебаний являются колебания обычного математического маятника. Его потенциальная энергия как функция угла отклонения от положения равновесия φ равна

$$U = mgl(1 - \cos \varphi). \quad (16.4)$$

Если φ не мало, то колебания являются ангармоническими. Ниже, на рис. 16.2, изображена зависимость потенциальной энергии от угла φ . Как мы знаем, в зависимости от полной энергии движение

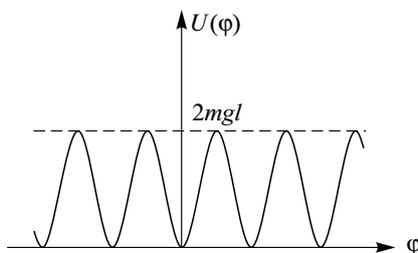


Рис. 16.2. Потенциальная энергия математического маятника $U(\varphi)$.

может быть финитным и инфинитным. Так, из представленного рисунка следует, что если полная энергия системы $E < 2mgl$, то угол φ при колебаниях изменяется в интервале $|\Delta\varphi| < 2\pi$. Если же

полная энергия $E > 2mgl$, то маятник прокручивается, совершая один за другим полные обороты на угол, равный 2π .

Фазовый портрет такого маятника изображен ниже на рис. 16.3 и представляет собой семейство

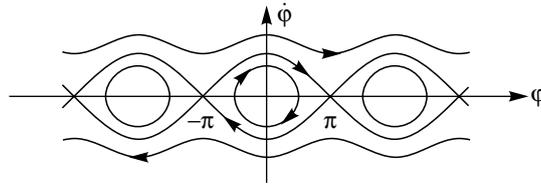


Рис. 16.3. Фазовый портрет математического маятника.

линий, описываемых уравнением

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \text{const} \quad (16.5)$$

при разных значениях константы.

Финитному движению соответствуют замкнутые траектории, а инфинитному — открытые. Линия, разделяющая финитное и инфинитное движение и соответствующая энергии $E = 2mgl$, называется **сепаратрисой**. При $E \gg 2mgl$ движение оказывается очень близким к равномерному вращению с угловой скоростью $\omega = \sqrt{2E/ml^2}$. При $E \ll 2mgl$ это гармонические колебания с угловой частотой $\omega = \sqrt{g/l}$.

Как мы уже упоминали, уравнение движения, описывающее свободные колебания одномерного ангармонического осциллятора, может быть проинтегрировано в общем виде, или, как говорят, сведено к квадратурам. Значительно более сложная ситуация возникает, однако, если на ангармонический осциллятор воздействует периодическая по времени внешняя сила. В этом случае проинтегрировать уравнения движения в общем виде не удастся и возможно только их численное решение. Такие исследования (компьютерные эксперименты) были проведены совсем недавно, в 1978-1979 (!) годах. Как это ни удивительно, они привели к довольно неожиданным результатам. Парадоксально, но факт, в науке, возраст которой оценивается примерно в 300 лет, совсем недавно, благодаря использованию компьютеров, оказалось возможным сделать новые фундаментальные открытия!

Проанализируем качественно основные результаты этих исследований на примере так называемого **уравнения Дуффинга**. Оно описывает колебания нелинейного осциллятора с трением под действием гармонической внешней силы:

$$m\ddot{x} + \alpha_p\dot{x} + k_0x(1 + \alpha x^2) = f \cos \gamma t. \quad (16.6)$$

При малой амплитуде вынуждающей силы f нелинейностью колебаний (членом αx^2) можно пренебречь. Тогда, как мы знаем, вынужденные колебания происходят по гармоническому закону $x = b \cos(\gamma t + \delta)$ с частотой вынуждающей силы. В фазовом пространстве (x, \dot{x}) траектория представляет собой эллипс.

При увеличении амплитуды силы f форма колебаний начинает отличаться от простого гармонического закона $b \cos(\gamma t + \delta)$, колебания становятся более сложными, в них появляются все в большей степени дополнительные слагаемые на кратных частотах $2\gamma, 3\gamma, \dots$, так называемые **обертоны** (высшие гармоники) основного колебания. В фазовом пространстве траектория теперь отличается от простого эллипса, однако по-прежнему представляет собой замкнутую кривую, по которой движется изображающая точка с периодом, равным периоду $T = 2\pi/\gamma$ вынуждающей силы (рис. 16.4). Отметим еще одну важную характерную особенность: принцип суперпозиции уже не выполняется, как в случае линейного осциллятора.

Помимо наличия высших гармоник и нарушения принципа суперпозиции, появляется еще одна характерная черта, свойственная нелинейным системам, — **множественность решений**. При заданных параметрах системы у уравнения (16.6) в общем случае может быть не одно, а два и более решений. Они соответствуют разным начальным условиям. В этой связи отметим, что в линейной системе с трением в пределе $t \rightarrow \infty$ решение всего одно и не зависит от выбора начальных условий. Ниже, на рис. 16.5, показаны две фазовые траектории одного и того же уравнения, соответствующие двум разным начальным точкам на фазовой плоскости. Из рисунка видно, что колебания, соответствующие правому решению, происходят с большей амплитудой.

Численные расчеты показывают, что при дальнейшем увеличении амплитуды f вынуждающей силы проявляется еще одна особенность. При некотором значении $f = f_1$ происходит так называемое

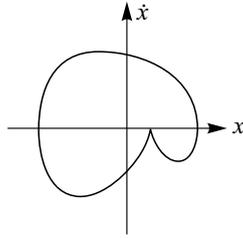


Рис. 16.4. Фазовая траектория осциллятора Дуффинга: $\ddot{x} + 0.05\dot{x} + x + x^2 = 0.9 \cos 0.7t$.

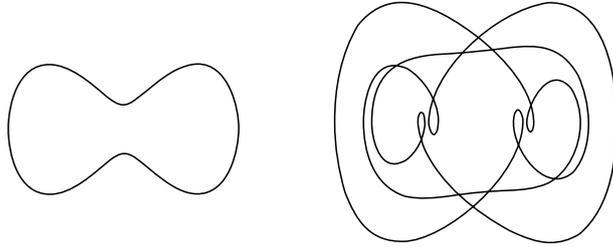


Рис. 16.5. Два решения уравнения $\ddot{x} + 0.01\dot{x} + x + x^3 = 1.9 \cos(0.7t)$, соответствующие двум разным начальным точкам на фазовой плоскости. Левая траектория соответствует основному периоду $T = 2\pi/\gamma$, в то время как правая отвечает утроенному периоду $3T$.

удвоение периода колебаний, $T \rightarrow 2T$. Это означает, что среди частот на которых происходит колебание, появляется частота $\gamma/2$. Траектория в фазовом пространстве качественно меняется — ее длина удваивается (рис. 16.6).

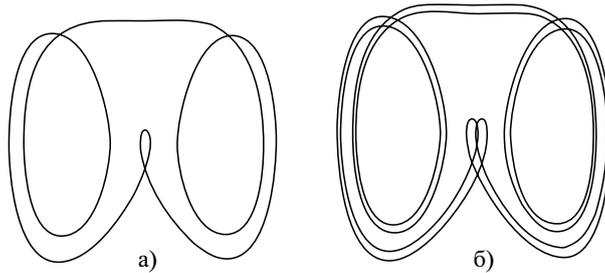


Рис. 16.6. Удвоение периода в уравнении Дуффинга: $\ddot{x} + 0.01\dot{x} + x + x^3 = f \cos(0.7t)$: а) $f = 9.2$, б) $f = 9.28$, $f_1 = 9.24$.

Причиной возникновения колебаний с удвоенным периодом является параметрический резонанс. Согласно формуле (16.1), при колебаниях происходит периодическое изменение жесткости пружины k . Период колебаний жесткости при большой амплитуде f совпадает с периодом $T = 2\pi/\gamma$ основных колебаний осциллятора. Все дальнейшее вполне аналогично тому, что происходит при раскачке качелей, когда стоящий на качелях человек периодически (с периодом T) приседает и выпрямляется, — происходит так называемое параметрическое возбуждение колебаний, то есть возбуждение, обусловленное периодическим изменением параметров осциллятора. Период таких колебаний ровно в два раза больше периода раскачки, то есть $T_1 = 2T$. Причем при наличии в системе трения возбуждение колебаний происходит при некоторой конечной амплитуде раскачки.

Таким образом, удвоение периода ангармонических колебаний связано с параметрическим возбуждением осциллятора вследствие зависимости $k(x)$. Следуя этой идее, нетрудно предположить, что возникшие колебания с удвоенным периодом, модулируя жесткость, приведут при некотором значении амплитуды f_2 к возникновению новых колебаний с периодом $2 \cdot 2T = 4T$. Таким образом, при увеличении амплитуды вынуждающей силы происходит целая **цепочка удвоений периода**: $2T, 4T, \dots$, а также возникают всевозможные обертоны этих колебаний.

Важным открытием 70-х годов явилось то, что рост числа **субгармоник** с ростом амплитуды f происходит чрезвычайно быстро. Последовательность **бифуркаций** f_1, f_2, \dots, f_n имеет, как выяснилось, конечный предел f_∞ . Другими словами, спектр частот вынужденных колебаний при $f > f_\infty$ из дискретного становится сплошным. Зависимость координаты $x(t)$ от времени в условиях, когда в спектре присутствуют все частоты, становится очень нерегулярной, **хаотической**.

Траектория изображающей точки перестает быть замкнутой и приобретает очень сложный, запу-

танный характер, плотно заполняя целые области на фазовой плоскости (рис. 16.7). Такая картина

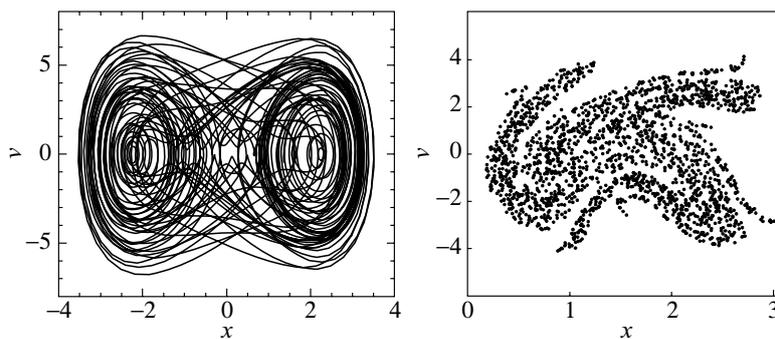


Рис. 16.7. Хаотическая фазовая траектория при $f > f_\infty$ и ее сечение Пуанкаре в уравнении Дуффинга $\ddot{x} + 0.01\dot{x} + x + x^3 = 14 \cos(0.7t)$.

уже не является наглядной, и для выяснения внутренних закономерностей возникшего хаотического движения используется следующий прием. На фазовой плоскости отмечают точки, отвечающие не всем значениям t , а только тем, которые, например, соответствуют фазе вынуждающей силы $\gamma t_n = 2\pi n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Получающаяся при этом система точек на плоскости (x, \dot{x}) называется **сечением** (или **отображением**) **Пуанкаре**. Оно включает в себе важную информацию о поведении функции $x(t)$ ¹.

Оказывается, что точки, представляющие собой сечение Пуанкаре, образуют бесконечные, строго упорядоченные множества точек, концентрирующихся вдоль некоторых линий (рис. 16.7). Они как бы вложены одно в другое. Например, если увеличить малую часть отображения Пуанкаре, то можно обнаружить более тонкую структуру и так до бесконечности. Схематически это показано на рис. 16.8. По математической терминологии, такая структура называется **канторовым множеством**

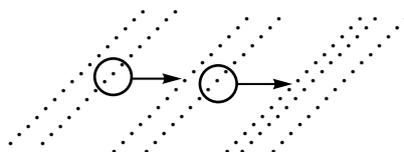


Рис. 16.8. Фрактальная структура сечения Пуанкаре.

или **фракталом**.

Чтобы лучше понять, что такое канторово множество приведем один пример. Возьмем отрезок длины 1 и, разделив его на три равные части, исключим среднюю часть. С оставшимися двумя отрезками проделаем ту же процедуру и так до бесконечности (рис. 16.9). Суммарная длина получившихся

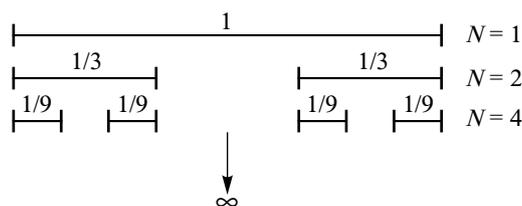


Рис. 16.9. Пример канторова множества.

в пределе отрезков равна нулю, так как мы исключили в результате вышеописанной процедуры длину, равную 1:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1 \quad (16.7)$$

Следовательно, возникшее множество представляет собой бесконечное число изолированных точек. Это и есть пример канторова множества.

Отметим два наиболее важных свойства канторовых множеств.

¹Для периодического движения сечение Пуанкаре состоит всего из одной точки, для движения с удвоенным периодом — из двух, и т.д.

- Любая малая часть канторова множества подобна самому множеству: увеличив масштаб в некоторое число раз, мы получим канторово множество с теми же свойствами. Это свойство называют **масштабной инвариантностью** (или **самоподобием**).
- Канторово множество является **фракталом** и имеет **дробную** пространственную размерность.

В рассмотренном только что примере множества опущенных средних третей размерность d_f заключена между нулем (набор отдельных точек) и единицей (отрезок прямой или кривой):

$$0 < d_f < 1. \quad (16.8)$$

Возникает интересный вопрос. А как определить эту пространственную размерность? Поступим для этого следующим образом. Выберем некоторый малый пространственный масштаб ε и найдем минимальное число $N(\varepsilon)$ отрезков длины ε , которое покрывает все множество. Тогда, по определению, размерность канторова множества, или, как еще говорят, **фрактальная размерность**, равна

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (16.9)$$

Действительно, если эту формулу применить к отрезку длины L , то $N(\varepsilon) = L/\varepsilon$ и

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(L/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = 1. \quad (16.10)$$

Для множества N изолированных точек $N(\varepsilon) = N$, и поэтому

$$d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/\varepsilon)} = 0. \quad (16.11)$$

В нашем примере для определения фрактальной размерности выберем $\varepsilon = 1/3^n$ (с $n \rightarrow \infty$ впоследствии). Тогда, как следует из рис. 16.9, $N(\varepsilon) = 2^n$, поэтому

$$d_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309. \quad (16.12)$$

Разумеется, для размерности канторова множества, возникающего при хаотических колебаниях, не существует такой простой формулы. Однако ее легко определить численно с помощью описанной выше процедуры. Оказывается, что если речь идет о фазовой траектории, то её фрактальная размерность всегда заключена между 1 и 2:

$$1 < d_f < 2 \quad (16.13)$$

Это означает, что геометрическая структура жгута траекторий на фазовой плоскости такова, что она занимает промежуточное положение между одномерными (то есть линейными) и двумерными (плоскими) объектами. Другими словами, жгут траекторий оказывается слишком пористым, чтобы можно было характеризовать его площадью, и слишком плотным и запутанным, чтобы его можно было характеризовать длиной. По причинам, которые будут приведены ниже, такой жгут имеет специальное название **странного аттрактора**. Размерность странного аттрактора увеличивается при увеличении амплитуды внешней силы и уменьшается с ростом трения в колебательной системе, которое подавляет хаотичность движения.

Предсказуемость хаотического движения

Черезвычайно сложная и запутанная фазовая траектория частицы приводит к тому, что предсказать ее поведение на достаточно больших интервалах времени становится практически невозможным. Теоретически знание параметров осциллятора и начальных условий (координаты и скорости) **однозначно** определяет функцию $x(t)$. То есть, как говорят, процесс является **детерминированным**. С другой стороны, небольшая неточность, например в начальных условиях, быстро накапливается, так что по прошествии некоторого времени неопределенность в положении частицы будет порядка размеров области движения. Такая сверхчувствительность к начальным условиям напоминает эксперимент с падением шарика на острие бритвы (рис. 16.10). В зависимости от своего начального положения шарик, ударившись об острие, отскакивает либо вправо, либо влево. Другими словами, это означает, что движение является **неустойчивым**.

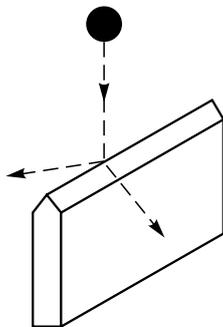


Рис. 16.10. Падение шарика на острие бритвы.

Одной из самых неустойчивых динамических систем является **двумерный газ Лоренца**. Эта модель была предложена Г. А. Лоренцем в начале нашего века для описания электропроводности металлов. Она состоит из кружков одинакового радиуса — рассеивателей, случайным образом разбросанных по плоскости, и материальной точки (частицы), которая движется с постоянной скоростью между ними, испытывая каждый раз зеркальное отражение при столкновении. В неустойчивости такой системы можно убедиться, рассмотрев две близкие траектории частицы, выходящие из одной точки. Из рис. 16.11 видно, что уже после двух актов рассеяния угол между траекториями, первоначально меньший 1° , становится большим $\pi/2$. Таким образом, первоначально близкие траектории очень быстро расходятся.

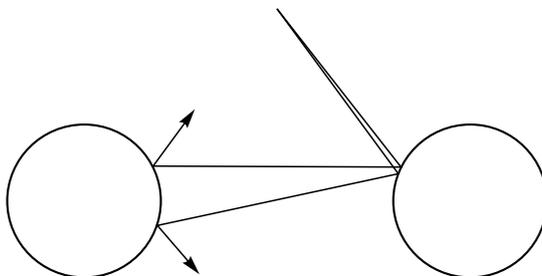


Рис. 16.11. “Потеря памяти” и расходимость близких траекторий в результате неустойчивости движения в двумерном газе Лоренца.

Поскольку довольно трудно вообразить себе движение, происходящее в ограниченной области пространства и всюду неустойчивое, оно и было названо **странным**. Частица, двигаясь подобным образом, быстро “забывает” свое прошлое, и предсказать, где она будет спустя некоторое время, становится практически невозможным.

В такой ситуации единственно разумным представляется лишь постановка вопроса о вычислении **вероятности** нахождения точки в том или ином месте фазового пространства. В результате мы приходим к выводу о необходимости **статистического подхода** к описанию вполне детерминированного процесса. Такая необходимость не является результатом нашего незнания движения или несовершенства вычислительного аппарата, а отражает глубокие внутренние свойства самого движения.

Похожая картина возникает при изучении движения частицы в **рассеивающем бильярде**². В случае выпуклой стенки малое начальное расстояние между двумя близкими траекториями при отскоке возрастает. Это возрастание происходит при каждом столкновении со стенкой, поэтому две траектории, поначалу очень близкие, буквально через несколько отскоков станут далекими. Таким образом, и здесь малая неточность в начальных данных быстро накапливается. Поэтому через некоторое время движение частицы в бильярде становится практически **непредсказуемым**.

²Так называется бильярд с выпуклыми стенками.

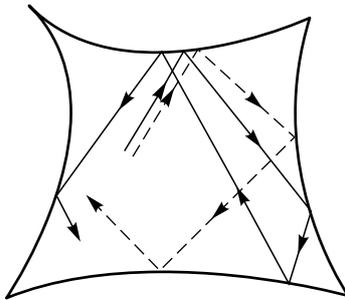


Рис. 16.12. “Непредсказуемое” движение частицы в рассеивающем бильярде.

Литература

- [1] Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1979 — 520 с.
- [2] Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклевский курс физики, том 1, Механика. М., Наука, 1975 — 480 с.
- [3] Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике (1–2 том). М., Мир, 1976 — 440 с.
- [4] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика в 10 томах, том 1, Механика. М., Наука, 1973 — 208 с.
- [5] Иродов И. Е. Задачи по общей физике. М., Наука, 1988 — 416 с.

Оглавление

Лекция 13.

Гармонические колебания.

Колебания математического маятника.

Колебания физического маятника.

Фазовый портрет маятника.

Адиабатические инварианты

2

Лекция 14.

Вынужденные колебания.

Биения.

Затухающие колебания.

Добротность.

Вынужденные колебания при наличии трения.

Принцип суперпозиции колебаний

10

Лекция 15. Параметрический резонанс

18

Лекция 16. Нелинейные колебания.

Фазовый портрет ангармонического осциллятора.

Отображение Пуанкаре.

Понятие о фракталах.

Предсказуемость хаотического движения

21